Ableitung

Probleme und Strategien

Folgende Problemstellungen treten in den unterschiedlichsten Situationen auf:

- Ableitungen elementarer Funktionen
  - ▷ $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ $\longrightarrow$ $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
  - ▷ $f(x) = \cos x$ $\longrightarrow$ $f'(x) = -\sin x$
  - ▷ $f(x) = e^x$ $\longrightarrow$ $f'(x) = e^x$
  - ▷ $f(x) = \ln(x)$ $\longrightarrow$ $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

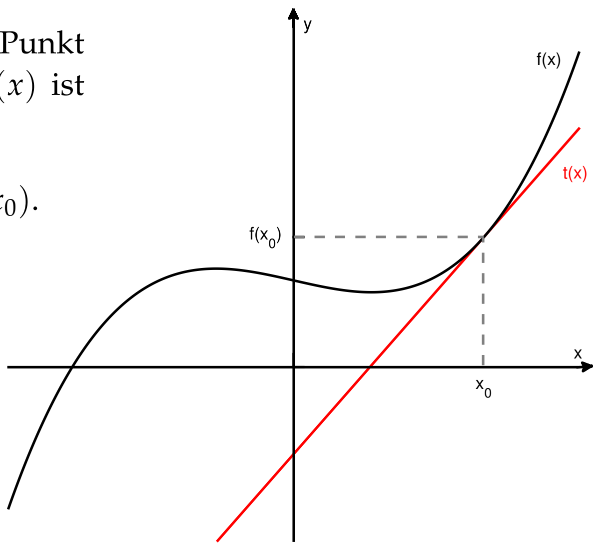
  → Strategien

- Ableitungsregeln bei Verknüpfung von Funktionen
  - ▷ Produktregel
    $f(x) = x \cdot e^x$ $\longrightarrow$ $f'(x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = (1+x) \cdot e^x$
  - ▷ Kettenregel
    $f(x) = \sin\left(x^2+1\right)$ $\longrightarrow$ $f'(x) = \cos\left(x^2+1\right) \cdot 2x$

  → Strategien

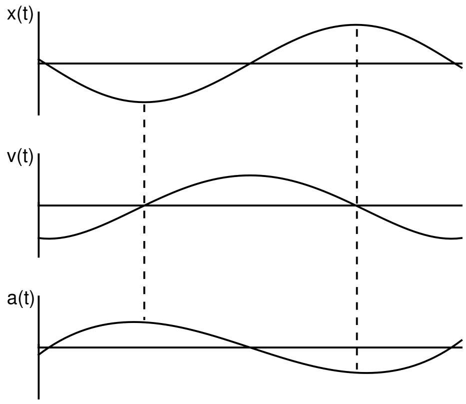
- Tangentenproblem
  Die Tangentengleichung im Punkt $(x_0, f(x_0))$ des Graphen von $f(x)$ ist gegeben durch

  $$t(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$



→ Strategien

- Zusammenhang zwischen Ort, Momentangeschwindigkeit und momentaner Beschleunigung



Sei $x(t)$ die Ort-Zeit-Kurve eines Körpers.

▷ Für die Momentangeschwindigkeit $v(t)$ gilt:

$$
\begin{aligned}
v(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{x(t+h)-x(t)}{h} \\
&= \frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t).
\end{aligned}
$$

▷ Die momentane Beschleunigung $a(t)$ ergibt sich zu

$$a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{x}(t).$$

→ Strategien

→ Übungsaufgaben und deren Lösungen finden Sie im zugehörigen ILIAS Modul

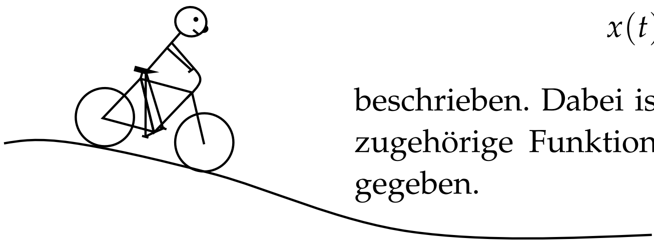
→ Regeln und Hintergründe

↓
Anwendungsbereiche

Anwendungsbereiche

In vielen Aufgabenstellungen muss die Ableitung einer Funktion bestimmt werden. Mögliche Anwendungsbereiche sind:

i) *Zusammenhang zwischen Strecke, Geschwindigkeit und Beschleunigung:*



Die zurückgelegte Strecke eines Fahrradfahrers wird durch die Weg-Zeit-Funktion

$$x(t) = t^3 + 2t^2 + 5t$$

beschrieben. Dabei ist die Zeit t in Sekunden und der zugehörige Funktionswert (der Weg) $x(t)$ in Metern gegeben.

a) Berechnen Sie die Anfangsgeschwindigkeit des Radfahrers.

b) Wie groß ist die Momentanbeschleunigung nach 10s?

$\longrightarrow$ Lösungsweg

ii) *Wachstumsprozess von Bakterien:*

Das Wachstum einer Bakterienkultur wird (nach dem Verhulst-Modell) beschrieben durch die Funktion

$$g(t) = \frac{10}{1+e^{-2t}} \qquad \text{für } t \geqslant 0;$$

wobei $g(t)$ die gesamte Masse der Bakterien (in geeigneten Einheiten) angibt und t die Zeit (in Stunden).

a) Bestimmen Sie die momentane Wachstumsgeschwindigkeit und zeigen Sie, dass diese mit t streng monoton zunimmt.

b) Bestimmen Sie eine positive Konstante K, so dass

$$g'(t) = 2 \cdot g(t) - K \cdot (g(t))^2$$

für alle t gilt. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

$\longrightarrow$ Lösungsweg

iii) *Gewinnmaximierung:*
Die bei der Produktion von Holztischen anfallenden Kosten eines Monopolunternehmens können durch die Kostenfunktion

$$K(x) = x^3 - 51 \cdot x^2 + 93 \cdot x + 20000$$

beschrieben werden. Die auf dem Markt herrschende Nachfrage ist durch die Preis-Absatz-Funktion

$$p(x) = 630 - 6x$$

gegeben. Für jeden produzierten und abgesetzten Holztisch entstehen Transportkosten in Höhe von 12 Geldeinheiten, so dass sich die Gesamtkosten des Monopolunternehmers um die Transportkosten $T(x) = 12 \cdot x$ erhöhen.

Bestimmen Sie die gewinnmaximale Menge x an Holztischen sowie die entstehenden Transportkosten T und den zugehörigen Gewinn des Monopolisten.

⟶ Lösungsweg

iv) *Momentangeschwindigkeit einer gedämpften harmonischen Schwingung:*

Die Auslenkung einer Feder bei einer (speziellen) gedämpften harmonischen Schwingung wird beschrieben durch die Funktion

$$f(t) = e^{-t} \cdot \sin(t) \qquad \text{für} \qquad t \geqslant 0.$$

Bestimmen Sie die Momentangeschwindigkeit sowie die Maximal- und Minimalstellen von f.

⟶ Lösungsweg

→ Übungsaufgaben und deren Lösungen
finden Sie im zugehörigen ILIAS Modul

↓
Regeln und Hinweise