

# Inhaltsverzeichnis

## Vorwort

## Vorbemerkung und Nutzungshinweise

## 0. Mathematische Grundlagen 1

Die in diesem Kapitel enthaltenen Inhalte stehen Ihnen als Download unter [www.toolbox.cemath.rwth-aachen.de](http://www.toolbox.cemath.rwth-aachen.de) kostenfrei zur Verfügung, sind aber nicht Bestandteil des Buchs.

## 1. Geometrie mit Sinus, Cosinus und Tangens 3

1.1. Fragen und Probleme . . . . .	4
1.2. Typische Anwendungen . . . . .	6
1.3. Fakten und Regeln . . . . .	7
1.3.1. Sinus, Cosinus und Tangens im rechtwinkligen Dreieck . . . . .	8
1.3.2. Steigung und Tangens . . . . .	12
1.3.3. Spezielle Werte von Sinus, Cosinus und Tangens . . . . .	13
1.3.4. Gradmaß und Bogenmaß . . . . .	15
1.3.5. Sinus, Cosinus und Tangens am Einheitskreis . . . . .	17
1.3.6. Sinussatz und Cosinussatz . . . . .	19
1.4. Trainingsaufgaben . . . . .	20
1.5. Lösungsskizzen . . . . .	21

## 2. Vektoren im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ 27

2.1. Fragen und Probleme . . . . .	28
2.2. Typische Anwendungen . . . . .	30
2.3. Fakten und Regeln . . . . .	32
2.3.1. Reelle Vektoren und ihre Darstellung . . . . .	32
2.3.2. Addition von Vektoren . . . . .	36
2.3.3. Multiplikation von Skalaren mit Vektoren . . . . .	39
2.3.4. Linearkombinationen – Zusammensetzen und Zerlegen eines Vektors . . . . .	42
2.3.5. Multiplikation von Vektoren (Skalarprodukt) . . . . .	45
2.3.6. Länge und Winkel . . . . .	46
2.3.7. Orthogonalität und Orthonormalbasen . . . . .	49
2.3.8. Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	51
2.4. Trainingsaufgaben . . . . .	53
2.5. Lösungsskizzen . . . . .	55

<b>3. Funktionen</b>	<b>63</b>
3.1. Fragen und Probleme	64
3.2. Typische Anwendungen	67
3.3. Fakten und Regeln	70
3.3.1. Funktionen: Grundlagen	70
3.3.2. Rechnen mit reellen Funktionen	71
3.3.3. Umkehrbarkeit und Umkehrfunktion	74
3.3.4. Wichtige Funktionstypen	75
3.3.5. Gleichungen, Nullstellen, Schnittpunkte	79
3.3.6. Exkurs: Existenz von Lösungen einer Gleichung	84
3.3.7. Rechnen mit Grenzwerten und Stetigkeit	86
3.3.8. Exkurs: Formales zu Grenzwerten	94
3.3.9. Monotonieverhalten und Extrema	97
3.4. Trainingsaufgaben	101
3.5. Lösungsskizzen	102
<b>4. Differentiation</b>	<b>107</b>
4.1. Fragen und Probleme	108
4.2. Typische Anwendungen	109
4.3. Fakten und Regeln	111
4.3.1. Geometrische Einführung der Ableitung	111
4.3.2. Definition der Ableitung	113
4.3.3. Technik des Differenzierens	115
4.3.4. Ableitungen und Eigenschaften von Funktionen	123
4.3.5. Anwendung: Wachstumsverhalten	129
4.3.6. Exkurs: Mittelwertsatz	130
4.3.7. Taylor-Entwicklung	131
4.3.8. Differentiation und Bestimmung von Grenzwerten	133
4.4. Trainingsaufgaben	136
4.5. Lösungsskizzen	137
<b>5. Eulersche Exponentialfunktion</b>	<b>141</b>
5.1. Fragen und Probleme	142
5.2. Typische Anwendungen	143
5.3. Fakten und Regeln	145
5.3.1. Eulersche Exponentialfunktion	145
5.3.2. Funktionalgleichung	146
5.3.3. Eigenschaften der Eulerschen Exponentialfunktion	147
5.3.4. Allgemeine Exponentialfunktionen	149
5.3.5. Differentialgleichungen	150
5.3.6. Reihenentwicklung und Anwendungen	151
5.3.7. Poisson-Verteilung	152
5.4. Trainingsaufgaben	153
5.5. Lösungsskizzen	154

<b>6. Potenzen und Logarithmen</b>	<b>159</b>
6.1. Fragen und Probleme	160
6.2. Typische Anwendungen	162
6.3. Fakten und Regeln	165
6.3.1. Potenzen und Rechnen mit Potenzen	165
6.3.2. Logarithmus und Umkehrung des Potenzierens	167
6.3.3. Eigenschaften des natürlichen Logarithmus	171
6.3.4. Potenzfunktionen	172
6.4. Trainingsaufgaben	174
6.5. Lösungsskizzen	175
<b>7. Trigonometrische Funktionen</b>	<b>179</b>
7.1. Fragen und Probleme	180
7.2. Typische Anwendungen	182
7.3. Fakten und Regeln	184
7.3.1. Von der Geometrie zur Funktion	184
7.3.2. Sinusfunktion auf $\mathbb{R}$	186
7.3.3. Cosinusfunktion auf $\mathbb{R}$	189
7.3.4. Tangens- und Cotangensfunktion	192
7.3.5. Ableitung und Stammfunktionen	194
7.3.6. Additionstheoreme – Rechnen mit Sinus und Cosinus	196
7.3.7. Zerlegung periodischer Funktionen (Fourier-Reihen)	197
7.3.8. Potenzreihenentwicklungen	199
7.3.9. Arcusfunktionen	200
7.4. Trainingsaufgaben	203
7.5. Lösungsskizzen	205
<b>8. Integration</b>	<b>213</b>
8.1. Fragen und Probleme	214
8.2. Typische Anwendungen	216
8.3. Fakten und Regeln	220
8.3.1. Integral als Grenzwert von Ober- und Untersummen	220
8.3.2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	222
8.3.3. Integrationstechnik	225
8.3.4. Stückweise definierte Funktionen	230
8.3.5. Integrale und Flächenberechnung	231
8.3.6. Uneigentliche Integrale	237
8.3.7. Weitere Anwendung: Kurvenlänge	239
8.3.8. Weitere Anwendung: Volumen eines Rotationskörpers	241
8.4. Trainingsaufgaben	242
8.5. Lösungsskizzen	245
<b>A. Funktionensteckbriefe</b>	<b>251</b>
Polynomfunktion, Polynom	251
Gebrochen rationale Funktion	253
Potenzfunktion	255

Eulersche Exponentialfunktion . . . . .	257
Logarithmusfunktion . . . . .	259
Sinusfunktion . . . . .	261
Cosinusfunktion . . . . .	262
Tangensfunktion . . . . .	263
Arcus-Sinusfunktion . . . . .	265
Arcus-Cosinusfunktion . . . . .	266
Arcus-Tangensfunktion . . . . .	267
<b>B. Grenzwerte</b>	<b>269</b>
B.1. Ausgewählte Grenzwerte von Funktionen . . . . .	269
B.2. Grenzwerte bei Summen, Differenzen, Produkten und Quotienten . . . . .	270
<b>Index</b>	<b>272</b>