

# Grundlagen der Mathematik

## Übungsaufgaben

im Vorkurs Mathematik 2022, RWTH Aachen University

— Logik —

### Aufgabe 1

Welche der folgenden Ausdrücke kann man als mathematische Aussagen auffassen?

a)  $x > 5$   
c)  $y^2 + 3$

b) Machen Sie Feuer!  
d) Norbert hat einen Bart.

### Aufgabe 2

Stellen Sie Wahrheitstabellen für die folgenden Formeln auf:

a)  $A \wedge (B \vee C)$ ,    b)  $(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ ,    c)  $\neg A \vee \neg B$ ,    d)  $A \vee \neg A$ .

### Aufgabe 3

Man beweise die folgenden Aussagen durch Vergleich der Wahrheitstabellen beider Seiten:

a)  $A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$ ,    b)  $A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ ,  
c)  $\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B$ ,    d)  $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$ ,  
e)  $A \vee (B \wedge \neg B) \Leftrightarrow A$ ,    f)  $A \wedge (\neg A \vee B) \Rightarrow B$ ,  
g)  $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ .

### Aufgabe 4

Geben Sie für die logischen Aussagen

a)  $3x - 7 = 2 \Rightarrow 3x = 9 \Rightarrow x = 3$

b)  $3x - 7 = 2 \Leftrightarrow 3x = 9 \Leftrightarrow x = 3$

c)  $3x - 7 = 2 \Leftarrow 3x = 9 \Leftarrow x = 3$

jeweils an, für welche der folgenden Aussagen sie als Begründung dienen können:

(1) Die Lösungsmenge der Gleichung  $3x - 7 = 2$  für  $x \in \mathbb{R}$  ist  $\{3\}$ .

(2) 3 ist eine Lösung der Gleichung  $3x - 7 = 2$  für  $x \in \mathbb{R}$ .

(3) Höchstens 3 ist eine Lösung der Gleichung  $3x - 7 = 2$  für  $x \in \mathbb{R}$ .

## Aufgabe 5

Welche der folgenden Ausführungen stellen einen Beweis der Tatsache  $(m - n)^2 + 4mn = (m + n)^2$  für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  dar?

(1) Für  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt

$$(m - n)^2 + 4mn = (m + n)^2 \quad \Rightarrow$$

$$m^2 - 2mn + n^2 + 4mn = m^2 + 2mn + n^2 \quad \Rightarrow$$

$$-2mn + 4mn = 2mn \quad \Rightarrow$$

$$2mn = 2mn,$$

und da  $2mn = 2mn$  stets eine wahre Aussage ist, muß  $(m - n)^2 + 4mn = (m + n)^2$  für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  gelten.

(2) Für  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt

$$(m - n)^2 + 4mn = (m + n)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$m^2 - 2mn + n^2 + 4mn = m^2 + 2mn + n^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$-2mn + 4mn = 2mn \quad \Leftrightarrow$$

$$2mn = 2mn,$$

und da  $2mn = 2mn$  stets eine wahre Aussage ist, muß  $(m - n)^2 + 4mn = (m + n)^2$  für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  gelten.

(3) Für  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt

$$(m - n)^2 + 4mn = (m + n)^2 \quad \Leftarrow$$

$$m^2 - 2mn + n^2 + 4mn = m^2 + 2mn + n^2 \quad \Leftarrow$$

$$-2mn + 4mn = 2mn \quad \Leftarrow$$

$$2mn = 2mn,$$

und da  $2mn = 2mn$  stets eine wahre Aussage ist, muß  $(m - n)^2 + 4mn = (m + n)^2$  für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  gelten.

(4) Für alle  $m, n \in \mathbb{N}$  gilt

$$(m - n)^2 + 4mn = m^2 - 2mn + n^2 + 4mn = m^2 + 2mn + n^2 = (m + n)^2.$$

## Aufgabe 6

Geben Sie an, welche der folgenden Rechnungen aus welchem Grund als Begründung für

$$(a - b)^2 + ab - b^2 = a \frac{a^2 - b^2}{a + b}$$

für  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \neq -b$  gut beziehungsweise weniger gut sind.

$$(1) (a-b)^2 + ab - b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + ab - b^2 = a^2 - ab = a(a-b) = a \frac{(a-b)(a+b)}{a+b} = a \frac{a^2 - b^2}{a+b}$$

$$(2) (a-b)^2 + ab - b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + ab - b^2 = a^2 - ab = a \frac{a^2 - b^2}{a+b} = a \frac{(a-b)(a+b)}{a+b} = a(a-b) = a^2 - ab.$$

$$(3) (a-b)^2 + ab - b^2 = a^2 - 2ab + b^2 + ab - b^2 = a^2 - ab \text{ und } a \frac{a^2 - b^2}{a+b} = a \frac{(a-b)(a+b)}{a+b} = a(a-b) = a^2 - ab.$$

### Aufgabe 7

Finden Sie den Fehler in der folgenden "Aufgabenlösung". Lösen Sie danach die Aufgabe korrekt.

Aufgabe: Man bestimme alle  $x \in \mathbb{R}$ , die sowohl  $1 + x^2 = 0$  als auch  $1 + x^3 = 0$  erfüllen.

Lösungsversuch: Es gilt

$$1 + x^2 = 0 \quad \text{und} \quad 1 + x^3 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$1 + x^2 = 1 + x^3 \quad \Rightarrow$$

$$x^2 = x^3 \quad \Rightarrow$$

$$x = 0 \quad \text{oder} \quad 1 = x,$$

also erfüllen 0 und 1 gleichzeitig  $1 + x^2 = 0$  und  $1 + x^3 = 0$ .

### Aufgabe 8

a) Geben Sie für jede der folgenden Bedingungen an, ob sie notwendig und/oder hinreichend dafür ist, dass ein Dreieck gleichseitig ist.

(i) Alle drei Seiten sind gleich lang.

(ii) Zwei Seiten des Dreiecks sind gleich lang.

(iii) Alle drei Winkel im Dreieck sind gleich  $60^\circ$ .

(iv) Zwei Winkel im Dreieck sind gleich  $60^\circ$ .

(v) Alle drei Seiten haben eine Länge von 5 cm.

(vi) Für eine Seite  $a$  des Dreiecks gilt  $h_a = \frac{a}{2}\sqrt{3}$ , wobei  $a$  die Länge der Seite  $a$  und  $h_a$  die Länge der Höhe auf  $a$  bezeichnet.

b) Geben Sie für jede der folgenden Bedingungen an, ob sie notwendig und/oder hinreichend dafür ist, dass ein Viereck ein Parallelogramm ist.

(i) Alle vier Seiten sind gleich lang.

- (ii) Zwei Seiten sind gleich lang.
- (iii) Es gibt zwei Paare gleich langer Seiten.
- (iv) Gegenüberliegende Seiten sind gleich lang.
- (v) Alle vier Winkel sind gleich groß.
- (vi) Zwei Winkel sind gleich groß.
- (vii) Es gibt zwei Paare gleich großer Winkel.
- (viii) Gegenüberliegende Winkel sind gleich groß.
- (ix) Die Diagonalen halbieren sich.

### **Aufgabe 9**

Über eine natürliche Zahl  $n$  werden die folgenden vier Aussagen getroffen, die abwechselnd falsch und wahr sind. Wie lautet die Zahl  $n$ ?

1.  $n$  ist nicht größer als 13.
2.  $n$  ist keine Primzahl.
3.  $n$  ist nicht ungerade.
4.  $n$  ist nicht größer als 17.

### **Aufgabe 10**

Ein Kaninchenzüchter hält alle seine Kaninchen in einem großen Gemeinschaftsstall. Es ist bekannt, dass von den folgenden Aussagen nur eine Aussage wahr ist. Welche?

- (A) Es sind mehr als 40 Kaninchen.
- (B) Alle Kaninchen sind gescheckt.
- (C) Kein Kaninchen ist einfarbig weiß.
- (D) Es sind weniger als 60 Kaninchen.
- (E) Es sind mehr als 50 Kaninchen.

### **Aufgabe 11**

Ein Narr will im Scherzamt seinen neuen Ausweis abholen. Ausweise gibt es nur an einem einzigen Schalter. Die Schilder sind verwirrend, aber es ist, wie im Scherzamt üblich, nur eine Aufschrift wahr.

- Schalter 1: Hier gibt es Ausweise.
- Schalter 2: Hier gibt es KEINE Ausweise.
- Schalter 3: Ausweise gibt es an Schalter 4.

- Schalter 4: Ausweise gibt es an Schalter 5.
- Schalter 5: Hier gibt es Ausweise.

Wo gibt es Ausweise?

### Aufgabe 12 (\*)

Seien  $A$  und  $B$  zwei Aussagen und  $Z(A, B)$  eine aus  $A$  und  $B$  zusammengesetzte Aussage, d.h. eine Aussage, deren Wahrheitswert durch die Wahrheitswerte von  $A$  und  $B$  eindeutig bestimmt ist.

1. Wieviele solche Aussagen  $Z(A, B)$  gibt es (bis auf Äquivalenz) ?
2. Wieviele davon sind symmetrisch in  $A$  und  $B$ , d.h.  $Z(A, B) \Leftrightarrow Z(B, A)$  ?
3. Geben Sie für jede Aussage  $Z(A, B)$  eine Darstellung mit Hilfe der Symbole  $\neg, \vee$  und  $\wedge$  an.

### Aufgabe 13

Der Kommissar hat einen Fall mit drei Verdächtigen P, Q und R. Die Ermittlungsergebnisse sind:

1. Falls P und Q nicht beide beteiligt waren, dann ist R außer Verdacht.
2. Ist Q schuldig oder R unschuldig, dann kann P nicht der Täter sein.
3. Mindestens einer der drei war der Täter.

Ermitteln Sie den oder die Täter.

### Aufgabe 14

Der Kommissar hat einen neuen Fall mit vier Verdächtigen P, Q, R und S. Die Ermittlungsergebnisse sind:

1. Ist P unschuldig, dann ist auch Q unschuldig. R wäre aber dann ganz sicher einer der Täter.
2. Ist S unschuldig, dann ist Q einer der Täter.
3. Ist S schuldig, dann ist auch R schuldig.
4. R hat ein todsicheres Alibi.

Ermitteln Sie den oder die Täter.

### Aufgabe 15

Schreiben Sie die folgenden Aussagen mit den Quantoren  $\forall$  und  $\exists$ , und bilden Sie dann die formale Verneinung (ebenfalls in Quantorenschreibweise).

- a) Es gibt ein  $x \in \mathbb{Z}$  mit  $x > 0$ .
- b) Für alle  $x \in \mathbb{Z}$  gilt  $x > 0$ .

- c) Für alle  $x \in \mathbb{Z}$  gibt es ein  $y \in \mathbb{Z}$  mit  $x > y$ .  
 d) Es gibt ein  $x \in \mathbb{Z}$ , so dass für alle  $y \in \mathbb{Z}$  gilt:  $x > y$ .

### Aufgabe 16

Entscheiden Sie jeweils, ob die zweite Aussage die formale Verneinung der ersten Aussage ist. Falls das nicht der Fall sein sollte, geben Sie für beide Aussagen jeweils eine korrekte Verneinung an.

- a) Die Zahl 4 ist durch 2 teilbar. – Die Zahl 4 ist durch 3 teilbar.  
 b) Die Zahl 6 ist durch 3 teilbar. – Die Zahl 6 ist nicht durch 3 teilbar.  
 c) Alle natürlichen Zahlen sind gerade. – Alle natürlichen Zahlen sind ungerade.  
 d) Alle natürlichen Zahlen sind ganze Zahlen. – Keine natürliche Zahl ist eine ganze Zahl.  
 e) Jede gerade Zahl ist durch 4 teilbar. – Es gibt eine gerade Zahl, die nicht durch 4 teilbar ist.  
 f) Es gibt eine natürliche Zahl, die nicht durch 1 teilbar ist. – Es gibt eine natürliche Zahl, die durch 1 teilbar ist.  
 g) Alle natürlichen Zahlen, die durch 6 teilbar sind, sind auch durch 3 teilbar. – Es gibt natürliche Zahlen, die weder durch 6 noch durch 3 teilbar sind.  
 h) Jede gerade Zahl größer 2 lässt sich als Summe zweier Primzahlen darstellen. – Es gibt eine gerade Zahl  $n$  größer 2, so dass für alle Primzahlen  $p$  und  $q$  gilt:  $p + q \neq n$ .  
 i) Zu jeder reellen Zahl  $r > 0$  gibt es eine natürliche Zahl  $N \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq N$  gilt:  $0 < \frac{1}{n}(1 + (-1)^n) < r$ . – Es gibt eine reelle Zahl  $r > 0$ , so dass für alle natürlichen Zahlen  $N$  stets ein  $n \geq N$  existiert mit  $\frac{1}{n}(1 + (-1)^n) > r$ . (Schreiben Sie zunächst beide Aussagen in Quantorenschreibweise!)

### Aufgabe 17

Bestimmen Sie die Wahrheitswerte der folgenden Aussagen.

- a)  $\forall x \in \mathbb{Z} : x > 0$ ,      b)  $\exists x \in \mathbb{Z} : x > 0$ ,      c)  $\forall x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z} : x > y$ ,  
 d)  $\forall x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} : x > y$ ,      e)  $\exists y \in \mathbb{Z} \forall x \in \mathbb{Z} : x > y$ ,      f)  $\exists x \in \mathbb{Z} \exists y \in \mathbb{Z} : x > y$ .

### Aufgabe 18

Tragen Sie in den folgenden Sätzen für (1) und (2) eine Bedingung beziehungsweise eine Aussage ein, so dass der erste Satz eine wahre Aussage und der zweite Satz eine falsche Aussage ist.

“Für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit (1) gilt (2).” – “Es gibt ein  $n \in \mathbb{N}$  mit (1), das (2) erfüllt.”

### Aufgabe 19

Luise hat sich eine vierstellige Zahl ausgedacht. Pierre versucht, sie herauszubekommen. Luise hat ihm ein paar Tipps gegeben:

1. 7642 – Keine der Ziffern ist korrekt.
2. 2741 – Eine Ziffer ist korrekt, aber an der falschen Stelle.
3. 4132 – Zwei Ziffern sind korrekt, aber beide stehen an der falschen Stelle.
4. 9826 – Eine Ziffer ist korrekt und steht auch an der richtigen Stelle.
5. 5079 – Zwei Ziffern sind korrekt. Eine steht an der richtigen Stelle, die andere nicht.

Wie lautet Luises Zahl?

— Mengenlehre —

### Aufgabe 20

Seien  $A = \{1, 2\}$ ,  $B = \{2, 3\}$  und  $C = \{1, 2, 3, 4\}$ . Man bilde die folgenden Mengen:

- |                                    |                                    |  |  |
|------------------------------------|------------------------------------|--|--|
| a) $A \cup B$ ,                    | b) $A \cap B$ ,                    | c) $(A \cup B) \cup C$ ,               | d) $(A \cap B) \cap C$ ,                     |
| e) $(A \cup B) \cap C$ ,           | f) $(A \cap B) \cup C$ ,           | g) $\complement_A B$ ,                 | h) $\complement_B A$ ,                       |
| i) $(A \setminus B) \setminus C$ , | j) $A \setminus (B \setminus C)$ , | k) $\mathfrak{P}(\emptyset)$ ,         | l) $\mathfrak{P}(\mathfrak{P}(\emptyset))$ , |
| m) $\mathfrak{P}(A)$ ,             | n) $\mathfrak{P}(A \cap B)$ ,      | o) $\mathfrak{P}((A \cup B) \cap C)$ . |  |

### Aufgabe 21

Geben Sie jeweils an, wie viele Elemente die Menge enthält.

- |   |   |   |
|---|---|---|
| a) $\emptyset$ ,                          | b) $\{\emptyset\}$ ,                              | c) $\{\{\emptyset\}\}$ ,                            |
| d) $\{1, 2, 3\}$ ,                        | e) $\{\{1, 2, 3\}\}$ ,                            | f) $\{1, \{2, 3\}\}$ ,                              |
| g) $\{1, \{2, \{3\}\}\}$ ,                | h) $\{\emptyset, 1, \{1\}, \{1, 1\}\}$ ,          | i) $\{\{\emptyset\}, \{2\}, \{2, \{2\}\}\}$ ,       |
| j) $\{1, 2\} \cup \{2, 4\}$ ,             | k) $\{1, 2\} \cap \{2, 4\}$ ,                     | l) $\{1, 2\} \setminus \{2, 4\}$ ,                  |
| m) $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3\}$ ,     | n) $\{1, 2, 3\} \setminus \{\{2, 3\}\}$ ,         | o) $\{1, 2, 3\} \setminus \{\{2\}, 3\}$ ,           |
| p) $\{1, \{2, 3\}\} \setminus \{2, 3\}$ , | q) $\{1, 2, \{3\}\} \setminus \{\{2\}, \{3\}\}$ , | r) $\{1, 2, \{1, 2, 3\}\} \setminus \{\{1, 2\}\}$ . |

### Aufgabe 22

Es seien  $A$  und  $B$  zwei Mengen mit  $A \subseteq B$ . Bestimmen Sie

- |                                       |                                    |                                       |                               |                               |                                       |
|---------------------------------------|------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|---------------------------------------|
| a) $A \cup \emptyset$ ,               | b) $A \cap \emptyset$ ,            | c) $A \cup B$ ,                       | d) $A \cap B$ ,               | e) $\complement_B B$ ,        | f) $\complement_A(A \cap B)$ ,        |
| g) $\complement_B \emptyset$ ,        | h) $\emptyset \setminus B$ ,       | i) $\complement_B(\complement_B A)$ , | j) $A \cup \complement_B A$ , | k) $A \cap \complement_B A$ , | l) $A \cup \complement_B \emptyset$ , |
| m) $A \cap \complement_B \emptyset$ , | n) $A \setminus \complement_B B$ , | o) $A \setminus \complement_B A$ .    |                               |                               |                                       |

### Aufgabe 23

Man beweise für beliebige Mengen  $A$ ,  $B$  und  $C$ :

- a)  $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$ .
- b)  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ .

- c)  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .
- d)  $A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A$ .
- e)  $A \subseteq B \Rightarrow \complement_C B \subseteq \complement_C A$ .
- f) Falls  $A \subseteq C$  gilt, folgt aus  $\complement_C B \subseteq \complement_C A$  stets  $A \subseteq B$ . Man gebe ein Beispiel dafür an, dass im Falle  $A \not\subseteq C$  aus  $\complement_C B \subseteq \complement_C A$  nicht notwendigerweise  $A \subseteq B$  folgen muss.
- g)  $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ .

### Aufgabe 24

Man beweise für beliebige Mengen  $X$  und  $Y$ :

- a)  $X \subseteq Y \Rightarrow \mathfrak{P}(X) \subseteq \mathfrak{P}(Y)$ .
- b)  $\mathfrak{P}(X) \cup \mathfrak{P}(Y) \subseteq \mathfrak{P}(X \cup Y)$ . Man gebe ein Beispiel dafür an, dass im Allgemeinen nicht  $\mathfrak{P}(X) \cup \mathfrak{P}(Y) = \mathfrak{P}(X \cup Y)$  gilt.

### Aufgabe 25 (\*)

Berechnen Sie  $\bigcap_{r \in \mathbb{R}} \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq r\}$ , und beweisen Sie Ihr Ergebnis.

### Aufgabe 26 (\*)

Es bezeichne  $A$  eine Menge. Zeigen Sie die Äquivalenz der Aussagen

- (i)  $B \setminus A = B$  für alle Mengen  $B$
- (ii)  $(A \cup B) \setminus A = B$  für alle Mengen  $B$
- (iii)  $A = \emptyset$

durch einen Ringschluss, das heißt: Zeigen Sie (i)  $\Rightarrow$  (ii), (ii)  $\Rightarrow$  (iii) und (iii)  $\Rightarrow$  (i).

## — Abbildungen —

### Aufgabe 27

Welche der folgenden Ausdrücke definieren Abbildungen? Falls eine Abbildung vorliegt, untersuchen Sie diese auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

- a)  $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ ;  $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), x \mapsto x^2$ ;  $f_3 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto x^2$ ;
- b)  $g_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3$ ;  $g_2 : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), x \mapsto x^3$ ;  $g_3 : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto x^3$ ;
- c)  $w_1 : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$ ;  $w_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \pm\sqrt{x^2}$ ;
- d)  $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, (m, n) \mapsto m - n$ ;
- e)  $p_m : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto m \cdot n$  (Untersuchung in Abhängigkeit von  $m \in \mathbb{N}$ );



- f)  $F_M : \mathfrak{P}(M) \rightarrow \mathfrak{P}(M), A \mapsto \mathbb{C}_M A$  (Untersuchung in Abhängigkeit von  $M \neq \emptyset$ );
- g)  $H_M : M \rightarrow \mathfrak{P}(M), x \mapsto \{x\}$  (Untersuchung in Abhängigkeit von der Menge  $M \neq \emptyset$ );
- h)  $u : (0, \infty) \rightarrow [2, \infty), x \mapsto \frac{1}{x}(x^2 + 1)$ ;
- i)  $v : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$  mit  $v(n) = \frac{n}{2}$  falls  $n$  gerade und  $v(n) = -\frac{n+1}{2}$  falls  $n$  ungerade;
- j)  $h_c : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + \frac{c}{x}$  (Untersuchung in Abhängigkeit von  $c \in \mathbb{R}$ ).

### Aufgabe 28

Seien  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2x + 1$  und  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (x - 1)^2$  zwei Abbildungen.

- a) Bestimmen Sie  $g \circ f$  und  $f \circ g$ .
- b) Bestimmen Sie den Wertebereich von  $f, g, f \circ g$  und  $g \circ f$ .

### Aufgabe 29

Was ist an Sprechweisen wie 'die Funktion  $x^2$ ' oder 'die Funktion  $f(x)$ ' formal gesehen falsch? Formulieren Sie die Zitate so um, dass sie formal korrekt sind.

### Aufgabe 30 (\*)

- a) Beweisen Sie: Die Abbildung  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, n \mapsto \begin{cases} \frac{n-1}{2} & n \text{ ungerade} \\ -\frac{n}{2} & n \text{ gerade} \end{cases}$  ist bijektiv.
- b) Konstruieren Sie eine bijektive Abbildung  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

### Aufgabe 31 (\*)

Seien  $X$  und  $Y$  beliebige nichtleere Mengen und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung. Man definiert für alle Mengen  $A \subseteq X$  und  $B \subseteq Y$  die Schreibweisen  $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$  und  $f^{-1}(B) = \{x \in X \mid f(x) \in B\}$ . Zeigen Sie für alle Mengen  $A, A' \subseteq X$  sowie  $B, B' \subseteq Y$ :

- a)  $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$ .
- b)  $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$ .
- c)  $A \subseteq f^{-1}(f(A))$ .

Geben Sie Beispiele dafür an, dass in (a) und (c) im Allgemeinen nicht Gleichheit gilt.

### Aufgabe 32

Untersuchen Sie die folgenden Zahlen darauf, ob sie Primzahlen sind. Bestimmen Sie anderenfalls deren Primfaktorzerlegung.

- a) 15,    b) 37,    c) 61,    d) 91,    e) 192,    f) 269,    g) 445,    h) 1001.

### Aufgabe 33

Bestimmen Sie alle Primzahlen  $< 100$  bzw.  $150$  bzw.  $< 200$ .

### Aufgabe 34

Bestimmen Sie jeweils den größten gemeinsamen Teiler der angegebenen Zahlen.

- a) 12, 16,    b) 17, 72,    c) 33, 99,    d) 91, 192,  
e) 84, 110,    f) 84, 135,    g) 110, 135,    h) 84, 110, 135.

### Aufgabe 35

Bestimmen Sie jeweils das kleinste gemeinsame Vielfache der angegebenen Zahlen.

- a) 12, 16,    b) 17, 72,    c) 33, 99,    d) 91, 192,  
e) 84, 110,    f) 36, 93,    g) 144, 1000,    h) 84, 110, 135.

### Aufgabe 36

Teilen Sie mit Rest:

- a) 41 durch 17,    b) 20 durch 100,    c) 347 durch 85,  
d) 22413 durch 19,    e)  $-318$  durch 9,    f)  $-491$  durch  $-11$ .

### Aufgabe 37 (\*)

Es seien  $a, b \in \mathbb{N}$  und  $b > a$ . Betrachten Sie den folgenden Algorithmus wiederholter Divisionen mit Rest:

$$\begin{array}{ll} b = m_1 \cdot a + r_1 & \text{mit } m_1, r_1 \in \mathbb{N}, 0 \leq r_1 < a, \\ a = m_2 \cdot r_1 + r_2 & \text{mit } m_2, r_2 \in \mathbb{N}, 0 \leq r_2 < r_1, \\ r_1 = m_3 \cdot r_2 + r_3 & \text{mit } m_3, r_3 \in \mathbb{N}, 0 \leq r_3 < r_2, \\ \vdots & \vdots \\ r_{j-2} = m_j \cdot r_{j-1} + r_j & \text{mit } m_j, r_j \in \mathbb{N}, 0 \leq r_j < r_{j-1}, \\ r_{j-1} = m_{j+1} \cdot r_j & \text{mit } m_{j+1} \in \mathbb{N}. \end{array}$$

Weil die Reste  $r_1 > r_2 > \dots > r_{j-1} > r_j \geq 0$  eine absteigende Kette nicht-negativer ganzer Zahlen sind, muss irgendwann, etwa an der Stelle  $j + 1$ ,  $r_{j+1} = 0$  gelten.

a) Führen Sie diesen Algorithmus aus für die folgenden Zahlenpaare  $(a, b)$ :

(i)  $(18, 4)$ ,

(ii)  $(63, 13)$ ,

(iii)  $(343, 91)$ .

b) Zeigen Sie: Jeder gemeinsame Teiler von  $a$  und  $b$  teilt auch  $r_1, \dots, r_j$ .

c) Zeigen Sie:  $r_j$  teilt  $r_i$  für  $i = 1, \dots, j$ , und  $r_j$  teilt  $a$  und  $b$ .

d) Zeigen Sie:  $r_j = \text{ggT}(a, b)$ .

e\*) Durch Rückwärtseinsetzen der  $r_i$  in  $r_{i-1}$  in diesem Algorithmus erhält man eine Darstellung von  $\text{ggT}(a, b)$  als  $\text{ggT}(a, b) = s \cdot a + t \cdot b$  mit Zahlen  $s, t \in \mathbb{Z}$ . Drücken Sie den  $\text{ggT}(a, b)$  für die Zahlenpaare aus Teil a) so aus.

— Bruchrechnung —

### Aufgabe 38

Geben Sie für die folgenden Brüche jeweils die vollständig gekürzte Darstellung an.

a)  $\frac{6}{21}$

b)  $\frac{60}{12}$ ,

c)  $\frac{28}{49}$ ,

d)  $\frac{25}{21}$ ,

e)  $\frac{105}{60}$ ,

f)  $\frac{17}{34}$ ,

g)  $\frac{34}{153}$ ,

h)  $\frac{200}{3200}$ ,

i)  $\frac{228}{209}$ ,

j)  $\frac{315}{255}$ ,

k)  $\frac{210}{315}$ ,

l)  $\frac{840}{1050}$ .

### Aufgabe 39

Vergleichen Sie jeweils die beiden gegebenen Brüche, indem Sie sie auf ihren Hauptnenner bringen. Schreiben Sie das richtige Relationszeichen ( $<$ ,  $=$  oder  $>$ ) zwischen die Brüche.

a)  $\frac{5}{14}$     $\frac{6}{21}$ ,

b)  $\frac{27}{5}$     $\frac{23}{3}$ ,

c)  $\frac{3}{13}$     $\frac{21}{91}$ ,

d)  $\frac{1}{3}$     $\frac{1}{2}$ ,

e)  $\frac{5}{4}$     $\frac{4}{5}$ ,

f)  $\frac{7}{3}$     $\frac{6}{4}$ ,

g)  $\frac{5}{8}$     $\frac{95}{152}$ ,

h)  $-\frac{7}{4}$     $-\frac{8}{3}$ .

### Aufgabe 40

Schreiben Sie als vollständig gekürzten Bruch ganzer Zahlen:

a)  $\frac{0,3}{0,4}$ ,

b)  $\frac{0,5}{1,5}$ ,

c)  $\frac{0,008}{0,02}$ ,

d)  $\frac{0,1}{0,004}$ ,

e)  $\frac{10,5}{6}$ ,

f)  $\frac{1,23}{3,6}$ .

### Aufgabe 41

Schreiben Sie die folgenden Doppelbrüche als vollständig gekürzten Bruch ganzer Zahlen:

a)  $\frac{7}{\frac{5}{6}}$ ,

b)  $\frac{\frac{13}{7}}{\frac{26}{14}}$ ,

c)  $\frac{\frac{72}{17}}{\frac{12}{17}}$ ,

d)  $\frac{\frac{13}{5}}{\frac{15}{7}}$

e)  $\frac{\frac{13}{5}}{\frac{15}{7}}$ ,

f)  $\frac{\frac{13}{5}}{\frac{15}{7}}$ ,

g)  $\frac{\frac{21}{5}}{\frac{10}{3}}$ ,

h)  $\frac{\frac{5}{21}}{\frac{3}{10}}$ .

### Aufgabe 42

Berechnen Sie (ohne Taschenrechner!):

a)  $\frac{17}{33} + \frac{5}{33}$ ,

b)  $\frac{1}{10} + \frac{1}{15}$ ,

c)  $\frac{18}{25} - \frac{13}{25}$ ,

d)  $\frac{13}{14} - \frac{2}{21}$ ,

e)  $\frac{2}{21} - \frac{13}{14}$ ,

f)  $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$ ,

g)  $\frac{12}{25} \cdot \frac{15}{8}$ ,

h)  $\frac{14}{17} : \frac{21}{17}$ ,

i)  $\frac{16}{21} : \frac{20}{9}$ ,

j)  $6 \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{5}$ ,

k)  $\left(\frac{2}{9} - \frac{1}{10}\right) : \frac{2}{45}$ ,

l)  $\frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}$ ,

m)  $\left(\left(\left(\frac{4}{3} + \frac{5}{2}\right) \cdot \frac{6}{5}\right) - \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{5}{2}$ ,

n)  $\frac{2}{9} : \left(\frac{17}{18} - \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{3}{7} + \frac{1}{14}\right)\right) + \frac{15}{2}$ .

### Aufgabe 43

a) Geben Sie Dezimaldarstellungen der folgenden Brüche an:  $\frac{7}{10}$ ,  $\frac{3}{16}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{5}{6}$ ,  $\frac{3}{7}$ ,  $\frac{2}{11}$  und  $\frac{123}{990}$ .  
*Hinweis:* Schriftliche Division

b) Schreiben Sie die folgenden Dezimaldarstellungen als (vollständig gekürzte) Brüche: 0,1; 0,2; 0,375;  $0,1\bar{6}$ ;  $0,2\bar{2}$ ;  $0,41\bar{6}$ ;  $0,14\bar{1}$ ;  $0,14\bar{1}$  und  $0,11\bar{8}$ .

### Aufgabe 44

Welcher der folgenden Brüche liegt am nächsten bei  $\frac{1}{2}$ ?

a)  $\frac{29}{57}$ ,

b)  $\frac{25}{79}$ ,

c)  $\frac{57}{92}$ ,

d)  $\frac{27}{59}$ ,

e)  $\frac{52}{97}$ .

### Aufgabe 45 (\*)

Warum ist es nicht sinnvoll, eine Addition von Brüchen durch folgende Vorschrift zu definieren: Der Zähler des Ergebnisses ist die Summe der Zähler der Summanden, und der Nenner des Ergebnisses ist die Summe der Nenner der Summanden?

— Potenzrechnung —

### Aufgabe 46

Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form  $a \cdot 10^z$  für eine ganze Zahl  $z$  und eine reelle Zahl  $a$ , bei der genau eine Ziffer vor dem Komma steht und diese von 0 verschieden ist.

- a) 23,4,    b) 0,062,    c) 100,    d) 0,000293,    e)  $14 \cdot 10^6$ ,    f) 1,8.

### Aufgabe 47

Wandeln Sie die folgenden Zehnerpotenz-Darstellungen in Dezimaldarstellungen um.

- a)  $6,7 \cdot 10^2$ ,    b)  $1,54 \cdot 10^{-1}$ ,    c)  $23 \cdot 10^5$ ,    d)  $8,11 \cdot 10^{-3}$ ,    e)  $3,3 \cdot 10^0$ .

### Aufgabe 48

Berechnen Sie:

- a)  $3^3$ ,    b)  $5^2$ ,    c)  $2^9$ ,    d)  $1^8$ ,    e)  $7^0$ ,    f)  $0^3$ ,    g)  $0^0$ ,  
h)  $4^{-2}$ ,    i)  $3^{-1}$ ,    j)  $(-4)^2$ ,    k)  $(-1)^{77}$ ,    l)  $(-5)^{-2}$ ,    m)  $(-4)^3$ ,    n)  $(-6)^1$ .

### Aufgabe 49

Schreiben Sie als eine Potenz mit einer ganzzahligen Basis zwischen 1 und 9 und ganzzahligem Exponenten:

- a) 49,    b) 81,    c)  $\frac{1}{128}$ ,    d) 125,    e)  $\frac{1}{36}$ ,    f) 1024,    g) 1296.

### Aufgabe 50

Schreiben Sie als *eine* Potenz:

- a)  $3^4 \cdot 3^2$ ,    b)  $7^3 \cdot 2^3$ ,    c)  $2^4 \cdot 4^3$ ,    d)  $6^4 \cdot 2^{-4}$ ,    e)  $\frac{3^5}{3^3}$ ,    f)  $\frac{10^4}{5^4}$ ,  
g)  $(7^7)^2$ ,    h)  $7^{7^2}$ ,    i)  $5^6 \cdot 5^7$ ,    j)  $3^{-4} \cdot 9^4$ ,    k)  $(4^3)^7$ ,    l)  $3^3 \cdot 3^3$ .

### Aufgabe 51

Berechnen Sie:

- a)  $4^{\frac{1}{2}}$ ,    b)  $27^{\frac{2}{3}}$ ,    c)  $32^{0,2}$ ,    d)  $\sqrt[4]{256}$ ,    e)  $\sqrt{\frac{9}{16}}$ ,  
f)  $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$ ,    g)  $\left(\frac{1}{4}\right)^{-0,5}$ ,    h)  $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{4}$ ,    i)  $\sqrt[5]{4} \cdot \sqrt[5]{8}$ ,    j)  $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[3]{3}$ .

### Aufgabe 52

Schreiben Sie als Wurzel einer rationalen Zahl:

a)  $4^{\frac{1}{5}}$ ,    b)  $2^{\frac{3}{4}}$ ,    c)  $3^{0,3}$ ,    d)  $4^{-\frac{2}{7}}$ ,    e)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,    f)  $\frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5}}$ ,    g)  $4^{\frac{2}{5}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}}$ .

### Aufgabe 53

Berechnen Sie geschickt:

a)  $\sqrt{5 \cdot 5^3}$ ,    b)  $(27\sqrt{8})^{\frac{2}{3}}$ ,    c)  $\sqrt{\frac{(-4)^6 \cdot 9}{24 \cdot 4^2}}$ ,    d)  $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[6]{9^2 \cdot 4}$ ,    e)  $\sqrt{5}\sqrt{2}\sqrt{20}\sqrt{18}$ .

### Aufgabe 54

Schreiben Sie die Terme jeweils in der Form  $a^u b^v c^w d^x$ .

Welche Voraussetzungen müssen dabei für die Variablen  $a, b, c, d$  erfüllt sein, damit wohldefinierte mathematische Ausdrücke vorliegen?

a)  $\frac{a^3 b^3}{a^2 b^5}$     b)  $\frac{1}{\sqrt{a^8 b^{16} c^2 d^{-4}}}$     c)  $\frac{a^{17} b^6 d^2}{a^{-7} c^{1/2} d^{5/7}}$   
d)  $\frac{a^{-5} \sqrt{\frac{b}{a}} \left(\frac{bd}{c}\right)^{1/3}}{\sqrt[3]{d}}$     e)  $\left(\frac{c^9 d^{1/5} a^5}{b^5 c^6 a^{-1} d^{4/5}}\right)^{-\frac{1}{3}}$

— Natürliche Zahlen und vollständige Induktion —

### Aufgabe 55

Geben Sie den Zahlenwert der folgenden Summen an:

a)  $\sum_{j=1}^3 j(j+1)$ ,    b)  $\sum_{n=1}^1 (3n+7)$ ,    c)  $\sum_{k=1}^{101} 3$ ,    d)  $\sum_{k=1}^5 \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$ .

### Aufgabe 56

Schreiben Sie mit dem Summenzeichen:

a)  $3^4 + 5^5 + 7^6 + 9^7$ ,    b)  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n+5}$ ,  
c)  $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{1024}$ ,    d)  $q - q^2 + q^3 - q^4 + \dots - q^{10}$ .

### Aufgabe 57

Berechnen Sie:

a)  $\prod_{j=2}^4 \frac{1}{j}$ ,    b)  $\prod_{l=0}^7 2$ ,    c)  $\prod_{j=2}^4 (3j)$ ,    d)  $\prod_{k=1}^5 \frac{k}{k+1}$ .

## Aufgabe 58

Schreiben Sie mit dem Produktzeichen:

$$\text{a) } 4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot 13, \quad \text{b) } n!, \quad \text{c) } \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}, \quad \text{d) } 9 \cdot 16 \cdot 25 \cdot 36 \cdot 49.$$

## Aufgabe 59

Ersetzen Sie jeweils " $\square$ " durch einen Term, der dazu führt, dass die Gleichheit für den allgemeinen Fall gültig wird. Geben Sie für (b) zwei verschiedene Lösungen an.

$$\text{a) } \sum_{j=-2}^n a_j = \sum_{k=1}^{\square} a_{k-3}, \quad \text{b) } \prod_{j=1}^n a_j = \prod_{k=0}^{n-1} a_{\square}.$$

## Aufgabe 60

Beweisen Sie für  $n \in \mathbb{N}$  und  $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$  beziehungsweise  $b_0, \dots, b_{n+1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ :

$$\begin{aligned} \text{a) } \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k+1}) &= a_1 - a_{n+1}, & \text{b) } \prod_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{b_{k+2}} &= \frac{b_0 b_1}{b_n b_{n+1}}, \\ \text{c) } \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} &= \frac{n}{n+1}, & \text{d) } \prod_{k=1}^n \frac{n-k+1}{k} &= 1. \end{aligned}$$

## Aufgabe 61

Geben Sie die Werte der folgenden Binomialkoeffizienten an:

$$\text{a) } \binom{3}{1}, \quad \text{b) } \binom{5}{0}, \quad \text{c) } \binom{6}{3}, \quad \text{d) } \binom{50}{49}, \quad \text{e) } \binom{50}{51}, \quad \text{f) } \binom{0}{0}, \quad \text{g) } \binom{0}{1}.$$

## Aufgabe 62

Beweisen Sie:

$$\begin{aligned} \text{a) } \text{Für alle } k, n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k \leq n \text{ gilt } (n+1) \binom{n}{k} &= (n-k+1) \binom{n+1}{k}. \\ \text{b) } \text{Für alle } k, n \in \mathbb{N} \text{ mit } k \leq n \text{ gilt } \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}} &= \frac{n-k+1}{k}. \\ \text{c) } \text{Für alle } k, n \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } k < n \text{ gilt } \binom{n}{k} + \binom{n+1}{k+1} &= \frac{n+k+2}{n-k} \binom{n}{k+1}. \end{aligned}$$

## Aufgabe 63

Eine Aussage  $A(n)$  soll mit vollständiger Induktion für alle  $n \in \mathbb{N}$  bewiesen werden. Der Induktionsanfang wurde für  $n = 1$  durchgeführt. Entscheiden Sie jeweils, ob die Formulierung der Induktionsvoraussetzung in diesem Beweis korrekt ist.

- (1) (IV) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gelte  $A(n)$ .
- (2) (IV) Sei  $n \in \mathbb{N}$ , und es gelte  $A(n)$ .
- (3) (IV) Es gelte  $A(n)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ .
- (4) (IV) Es gelte  $A(n)$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .
- (5) (IV) Es gelte  $A(n)$  für  $n \in \mathbb{N}$ .
- (6) (IV) Es gelte  $A(n+1)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ .
- (7) (IV) Es gelte  $A(n)$  und  $A(n+1)$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ .
- (8) (IV) Sei  $n \in \mathbb{N}$  so, dass  $A(n)$  gilt.
- (9) (IV) Sei  $n \in \mathbb{N}$  so, dass  $A(n+1)$  gilt.

### Aufgabe 64

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion:

- a) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\sum_{j=1}^n j \cdot j! = (n+1)! - 1$ .
- b) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n}$ .
- c) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\sum_{j=1}^{2n-1} (-1)^{j-1} j^2 = n(2n-1)$ .
- d) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $n! \geq 2^{n-1}$ .
- e) Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $x \in \mathbb{R}$  mit  $x > -1$  gilt  $(1+x)^n \geq 1+nx$ .
- f) Für alle  $k, n \in \mathbb{N}_0$  mit  $k \leq n$  gilt  $\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^n \binom{m}{k}$ .
- g) Für alle  $m \in \mathbb{N}$  gilt  $\sum_{s=1}^m (6s-3) = 3m^2$ .
- h) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\sum_{m=1}^n \frac{m}{(m+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ .
- i) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\prod_{k=1}^n 16^k = 4^{n(n+1)}$ .
- j) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist  $8^n - 1$  durch 7 teilbar (ohne Rest).

### Aufgabe 65

Beweisen Sie durch Anwendung des binomischen Satzes:



a) Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  gilt  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .

b) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ .

### Aufgabe 66

Beweisen Sie durch Anwendung von Aufgabe 65 (a):

a)  $2^n \geq n$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,      b)  $2^n \geq \frac{1}{4}n^2$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 2$ ,  
 c)  $2^n \geq \frac{1}{27}n^3$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 3$ ,      d)  $2^n \geq \frac{1}{16}n^3$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n \geq 4$ .

### Aufgabe 67 (\*)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen mit vollständiger Induktion:

a) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a \neq b$  gilt  $\frac{a^n - b^n}{a - b} = \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$ .

b) Für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ .

c) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ .

d) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\sum_{k=1}^n (k+1) \binom{n}{k} = 2^{n-1}(n+2) - 1$ .

e) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} - 1$ .

### Aufgabe 68 (\*)

Stellen Sie jeweils (anhand einer Wertetabelle) eine Vermutung auf, für welche  $n \in \mathbb{N}$  die Ungleichung gilt. Beweisen Sie Ihre Vermutung mit der Wertetabelle und vollständiger Induktion.

a)  $n! \geq 2^n$ ,      b)  $n! < 3^{n-1}$ ,      c)  $2^n \geq n^2$ ,      d)  $n! \geq n^n$ .

— Termumformungen —

### Aufgabe 69

Welcher der folgenden Terme ist eine Summe, welcher ein Produkt?

a)  $(2 + x + y) \cdot (x + 3)$ ,      b)  $(y - 3)(y + 3) + (y + 6)$ ,      c)  $a \cdot x + b \cdot y$ ,      d)  $(2x - 3)(4a - 2b)$ .

## Aufgabe 70

Multiplizieren Sie aus:

$$\begin{array}{llll} \text{a) } 2 \cdot (x + 3), & \text{b) } (y - 3)(y + 6), & \text{c) } (a + 2)^2, & \text{d) } (2x - 3)(4a - 2b), \\ \text{e) } (3a - b)^2, & \text{f) } (7x + yz)(yz - 7x), & \text{g) } (a - b)(a^2 + ab + b^2), & \text{h) } (-4x + 2y)^2, \\ \text{i) } (a + 1)^3, & \text{j) } (a - b)^3, & \text{k) } (a + 1)(b + 2)(c + 3), & \text{l) } (a - b)^2 \cdot (a + b). \end{array}$$

## Aufgabe 71

Fassen Sie zu einem Produkt zusammen:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 3a - 3b, & \text{b) } ac + 2c - ad - 2d, & \text{c) } 12ax + 6ay + 20bx + 10by, \\ \text{d) } 4x^2 + 12xy + 9y^2, & \text{e) } ab - 3a + 7b - 21, & \text{f) } 4ax + 14ax^2 + 50a^2b. \end{array}$$

## Aufgabe 72

Vereinfachen Sie. Überlegen Sie genau, welche Einschränkungen an die Variablen für diese Umformungen nötig sind:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } 1 - \frac{n-1}{n}, & \text{b) } \frac{1}{a+b} \left( \frac{1}{ab^2} + \frac{1}{a^2b} \right), & \text{c) } \left( \frac{4}{xy} + \frac{3}{yz} \right) \left( \frac{xz-y}{y} + 1 \right), \\ \text{d) } \frac{\frac{x}{y} - \frac{z}{x}}{\frac{2}{x} - \frac{z}{y}}, & \text{e) } \frac{x-2}{x-3} - \frac{x-1}{x-2}, & \text{f) } \left( \frac{x^2}{2y} - \frac{y^2}{2x} \right) : \left( \frac{2}{x} - \frac{2}{y} \right), \\ \text{g) } \frac{\frac{2}{x} + \frac{x}{2}}{\frac{2}{x} - \frac{x}{2}}, & \text{h) } \frac{\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}}, & \text{i) } \frac{1}{2 + \frac{1}{2x + \frac{1}{2x^2}}}. \end{array}$$

## Aufgabe 73

Es seien  $y > 0$  und  $w < 0$ . Weiter seien  $m, n$  ganze Zahlen. Vereinfachen Sie. Überlegen Sie genau, welche Einschränkungen an die restlichen Variablen für diese Umformungen nötig sind.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sqrt{x^2}, & \text{b) } \sqrt{y^2}, & \text{c) } \sqrt{w^2}, \\ \text{d) } \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3}, & \text{e) } \frac{r^{z+1} - r^{1-z}}{r^{-z} - r^z}, & \text{f) } \frac{r^{-s} - s^{-r}}{s^r - r^s} - \frac{1}{s^r r^s}, \\ \text{g) } \frac{(2r^{-6}s^3)^{-3}}{(2r^5s^{-2})^4}, & \text{h) } -\frac{(-r)^{3m}(-s^{5n})}{(-s)^{2m}(-r)^{4n+3}}, & \text{i) } \frac{(r^3)^2 r^5 s^{-3^2}}{(r^{-1})^{-6} r^2 s^{-2 \cdot 4}}. \end{array}$$

## Aufgabe 74

Es seien  $a, b, r, s, x$  reelle Zahlen mit  $a \geq b \geq 0$  und  $x \geq 0$  sowie  $a \neq x, s \neq 0$  und  $r \neq -s$ . Vereinfachen Sie mit Hilfe der binomischen Formeln:

$$\text{a) } \sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \cdot \sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}},$$

$$\text{b) } \frac{a\sqrt{ax} - x\sqrt{ax}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}},$$

$$\text{c) } \frac{s^3 - r^2s}{rs + s^2},$$

$$\text{d) } \frac{(r-s)^2 + 4rs}{(r+s)^2}.$$

### Aufgabe 75

Bringen Sie die folgenden Terme durch Erweitern auf eine Form, in der im Nenner keine Wurzeln mehr stehen. Dabei seien  $a$  und  $b$  reelle Zahlen mit  $a, b \geq 0$  und  $a \neq b$ .

$$\text{a) } \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{b}},$$

$$\text{b) } \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}},$$

$$\text{c) } \frac{1}{\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ab} + \sqrt[3]{b^2}},$$

$$\text{d) } \frac{1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b}}.$$

— Gleichungen und Ungleichungen —

### Aufgabe 76

Bringen Sie die folgenden Terme durch quadratische Ergänzung auf die Scheitelpunktform  $a(x-b)^2 + c$ , und lesen Sie daran Art und Lage des lokalen Extremums sowie die Anzahl der Nullstellen der zugehörigen Parabel ab.

$$\text{a) } x^2 - 4x + 5, \quad \text{b) } \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{9}{2}, \quad \text{c) } -3x^2 + 12x - 11, \quad \text{d) } 2x^2 - 4x + 2.$$

### Aufgabe 77

Bringen Sie die folgenden quadratischen Terme durch Raten der richtigen Koeffizienten auf die Form  $(x-a)(x-b)$ , und lesen Sie daran die Nullstellen der Parabel ab. Hinweis: Ist  $x^2 + px + q = (x-a)(x-b)$ , so muß  $q = ab$  gelten; in dieser Aufgabe sind  $a$  und  $b$  stets ganzzahlig.

$$\text{a) } x^2 - 2x, \quad \text{b) } x^2 - 5x + 6, \quad \text{c) } x^2 + 5x + 6, \quad \text{d) } x^2 + 3x - 4.$$

### Aufgabe 78

Lösen Sie die folgenden Gleichungen (sofern möglich) mit der  $p$ - $q$ -Formel, durch quadratische Ergänzung oder wie in der letzten Aufgabe.

$$\begin{array}{lll} \text{a) } x^2 + x - 6 = 0, & \text{b) } \frac{1}{3}x^2 + \frac{10}{3}x + \frac{34}{3} = 0, & \text{c) } x^2 - 4x + 5 = 3x^2 + 7, \\ \text{d) } x^2 + 7x = 0, & \text{e) } 4x^2 - 1 = 0, & \text{f) } x^2 = x + 1, \\ \text{g) } x^4 - 13x^2 + 36 = 0, & \text{h) } x^4 + 2x^2 + 1 = 0, & \text{i) } x^4 - 2x^2 - 8 = 0. \end{array}$$

### Aufgabe 79

Geben Sie für die folgenden Gleichungen an, für welche reellen Zahlen  $x$  (gegebenenfalls in Abhängigkeit von den Parametern  $a$  und  $b$ ) beide Seiten definiert sind. Lösen Sie dann die Gleichung in  $x$ .

a)  $\frac{x+8}{x+1} = x-4,$

b)  $\frac{x+4}{x+5} = \frac{2x}{x-4},$

c)  $\frac{x+a+b}{x} + 1 = \frac{x+5a-b}{x+a-b}.$

### Aufgabe 80

Es seien  $x, y$  und  $z$  drei (paarweise) verschiedene reelle Zahlen. Die Summen  $z+z+y$ ,  $x+x+y$ ,  $y+y+z$  und  $y+y+z$  sind in dieser Reihenfolge nach der Größe geordnet. Wo muss  $x+y+z$  eingeordnet werden?

### Aufgabe 81

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Ungleichungen.

a)  $x^2 > 9,$

b)  $x^2 + 6x + 3 < 10,$

c)  $x^2 + 3x - 9 \leq -x^2 + 7x + 7,$

d)  $2x^2 + 3 \leq 1 - 4x,$

e)  $x^2 - 4x + 6 < 2x^2 - 12x + 28,$

f)  $3x^4 + 4 \leq 2x^4 + 5x^2.$

### Aufgabe 82

Für welche  $x \in \mathbb{R}$  sind die Ungleichungen definiert? Bestimmen Sie die Lösungsmengen.

a)  $\frac{x-1}{x+1} < \frac{2x-1}{2x+1},$     b)  $\frac{x^2-5x+4}{x^2-8x+15} \geq 0,$     c)  $\frac{x}{x+2} < \frac{2x-1}{3x-5}.$

### Aufgabe 83

Beweisen Sie die folgenden Ungleichungen:

a)  $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x, y > 0,$

b)  $2xy \leq \frac{1}{2}(x+y)^2 \leq x^2 + y^2$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}.$

### Aufgabe 84 (\*)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen. Für den Umgang mit den Ungleichungszeichen  $<$  und  $>$  dürfen Sie hier nur die aus der Vorlesung bekannten Anordnungsaxiome (O.1) bis (O.4) verwenden.

a) Ist  $r \in \mathbb{R}$ , so gilt  $r < 0 \Leftrightarrow -r > 0.$

b) Für alle  $r \in \mathbb{R}$  mit  $r \neq 0$  gilt  $r^2 > 0.$

c)  $1 > 0.$

d) Ist  $r \in \mathbb{R}$  mit  $r > 0$ , so gilt auch  $\frac{1}{r} > 0$ .

### Aufgabe 85

Lösen Sie die Beträge auf, das heißt, geben sie einen gleichwertigen Ausdruck ohne Betragstri-  
che (dafür gegebenenfalls mit Fallunterscheidung) an.

$$\text{a) } |x - 5|, \quad \text{b) } |x^2 - 5x + 6|, \quad \text{c) } |x^2 - 2x + 1|, \quad \text{d) } \frac{|x^2 + x - 2|}{|x + 4|}.$$

### Aufgabe 86

Für welche  $x \in \mathbb{R}$  sind die folgenden Ungleichungen erfüllt?

$$\text{a) } |x + 4| < 2, \quad \text{b) } |x - 1| > 1, \quad \text{c) } |x - 3| > 0 \text{ und } |x + 1| < 5.$$

### Aufgabe 87

Lösen Sie die folgenden Betragsgleichungen.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } |x + 1| = x + 2, & \text{b) } |x - 1| - 2 = -x + 1, \\ \text{c) } 2|x + 1| - 1 = 2x + 1, & \text{d) } -3|x - 2| = 3x + 1. \end{array}$$

### Aufgabe 88

Für welche  $x \in \mathbb{R}$  sind die folgenden Gleichungen definiert? Lösen Sie die Gleichungen.

$$\text{a) } \frac{x^2 - 3x - 4}{2|x^2 - 4|} = 1, \quad \text{b) } \left| \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} \right| - 1 = 1.$$

### Aufgabe 89

Untersuchen Sie, welche  $x \in \mathbb{R}$  die folgenden Ungleichungen erfüllen.

$$\text{a) } |x^2 - 2x - 2| < 2x - 1, \quad \text{b) } |x^2 + x - 1| > (x - 2)^2 + 1, \quad \text{c) } |x - 1| < |2x - 3| - 1.$$

### Aufgabe 90

Für welche  $x \in \mathbb{R}$  sind die folgenden Ungleichungen definiert? Lösen Sie die Ungleichungen.

$$\text{a) } \frac{2 - |x - 1|}{|x - 4|} \geq \frac{1}{2}, \quad \text{b) } \frac{|x| - 1}{x^2 - 1} \geq \frac{1}{2}, \quad \text{c) } \frac{|(x + 2)^2 - 2|}{x + 1} > 1.$$

### Aufgabe 91

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form  $u + iv$  mit  $u, v \in \mathbb{R}$ :

- a)  $(1 + 2i) + (4 + i)$ ,      b)  $(1 + 2i) - (4 + i)$ ,      c)  $(1 + 2i) \cdot (4 + i)$ ,  
d)  $(-11 + i) - (5 - 2i)$ ,      e)  $(-11 + i) + (5 - 2i)$ ,      f)  $(-11 + i) \cdot (5 - 2i)$ ,  
g)  $(10 + 3i) + (4 - 2i)$ ,      h)  $(10 + 3i) - (4 - 2i)$ ,      i)  $(10 + 3i) \cdot (4 - 2i)$ ,  
j)  $(-9 + 7i) + (-5 + 2i)$ ,      k)  $(-9 + 7i) - (-5 + 2i)$ ,      l)  $(-9 + 7i) \cdot (-5 + 2i)$ .

### Aufgabe 92

Bestimmen Sie jeweils  $\operatorname{Re}(z)$ ,  $\operatorname{Im}(z)$ ,  $\bar{z}$  und  $|z|$  für

- a)  $z = 2$ ,      b)  $z = 5i$ ,      c)  $z = 3 + 4i$ ,      d)  $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$ ,  
e)  $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ,      f)  $z = 7 - 6i$ ,      g)  $z = 5 + 12i$ ,      h)  $z = 2 + 2\sqrt{3}i$ .

### Aufgabe 93

Zeigen Sie für  $z \in \mathbb{C}$ :

$$\text{a) } \operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \text{b) } \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

### Aufgabe 94

Zeigen Sie für  $z, w \in \mathbb{C}$ :

$$\text{a) } \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}, \quad \text{b) } |z|^2 = \bar{z} \cdot z, \quad \text{c) } |z \cdot w| = |z| \cdot |w|.$$

### Aufgabe 95

Seien  $z, w \in \mathbb{C}$ . Beweisen Sie mit Hilfe von A 94 (b) die Parallelogrammidentität:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

### Aufgabe 96

Schreiben Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form  $u + iv$  mit  $u, v \in \mathbb{R}$ :

- a)  $\frac{1}{i}$ ,      b)  $\frac{10 + 3i}{4 - 2i}$ ,      c)  $\frac{5}{2 - i}$ ,      d)  $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{-1}$ ,  
e)  $\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{2}i}{\sqrt{3} - \sqrt{2}i}$ ,      f)  $\frac{1}{3 + 4i}$ ,      g)  $\frac{4 + 3i}{1 - 2i}$ ,      h)  $\left(\frac{1 + i}{1 - i}\right)^2$ ,  
i)  $\frac{1}{i + \frac{1}{i+1}}$ ,      j)  $\frac{(1 + i)^5}{(1 - i)^3}$ ,      k)  $\frac{3 + 5i}{4 + i}$ ,      l)  $\frac{2 + 3i}{4 - 5i}$ .

### Aufgabe 97

Berechnen Sie:

a) $i^2 + i^5 + i^3$ ,	b) $i(-i) - i^2 + i^3 - i^8$ ,	c) $6i - 3i^2 + 3i^3 + i^9$ ,	d) $(2i - i^2)^2$ ,
e) $\frac{1}{i^3}$ ,	f) $\frac{1}{i^6}$ ,	g) $\frac{i^3}{i^5}$ ,	h) $\frac{i^4}{i^2}$ ,
i) $i^{-1} - i^{-3}$ ,	j) $i^{-2} + i^2$ ,	k) $i^{31}$ ,	l) $(1 + i)^{17}$ ,
m) $i^2 - \frac{1}{i}$ ,	n) $\left(i - \frac{1}{i}\right)^2$ ,	o) $(-i)^3 + \frac{1}{i^4}$ ,	p) $1 - \frac{1}{i}$ .

### Aufgabe 98

Bestimmen Sie alle ganzzahligen Potenzen von

a) $\zeta = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ ,	b) $\zeta = \frac{\sqrt{2}(1 + i)}{2}$ .
--	--

### Aufgabe 99

Bestimmen Sie die Polarkoordinatendarstellung der folgenden Zahlen. Wählen Sie dabei das Argument  $\varphi$  im Intervall  $[0, 2\pi)$ .

a) $-5$ ,	b) $-5i$ ,	c) $\frac{1 + i}{2}$ ,	d) $\frac{\sqrt{2}(1 - i)}{2}$ ,
e) $\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$ ,	f) $3 + 3i$ ,	g) $-\sqrt{3} + i$ ,	h) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{3i}{2}$ .

### Aufgabe 100

Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen über  $\mathbb{C}$ :

a) $z^2 - 2iz - 2 = 0$ ,	b) $z^2 - 2z - i = 0$ ,	c) $z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ ,
d) $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$ ,	e) $z^2 + 2(1 - i)z = 2i$ ,	f) $z^3 - 3z^2 + (3 - 2i)z = 1 - 2i$ ,
g) $z^2 = i\bar{z}$ ,	h) $z^2 + (2 - 2i)z = 4i$ ,	i) $z^4 + 2iz^2 = 2$ .

— Zusatzmaterial: Prozentrechnung —

### Aufgabe 101

Berechnen Sie jeweils den Prozentwert.

a) 10 % von 130,	b) 6 % von 75,	c) 8,7 % von 243,	d) 153 % von 13,7.
------------------	----------------	-------------------	--------------------

### Aufgabe 102

Berechnen Sie jeweils den Prozentsatz.

- a) 6 von 75,      b) 23 von 141,      c) 13,7 von 8,      d) 66,42 von 3801,2.

### **Aufgabe 103**

Berechnen Sie jeweils den Grundwert.

- a) 10 % sind 73,      b) 7 % sind 12,      c) 32 % sind 5,4,      d) 5,4 % sind 2,8.

### **Aufgabe 104**

Bei einer Vorstandswahl in einem Verein stimmten im letzten Jahr 417 von 532 Mitgliedern für einen Kandidaten. In diesem Jahr erhielt derselbe Kandidat 486 von 599 Stimmen.

- Berechnen Sie für beide Jahre die Zustimmungquote für den Kandidaten in Prozent.
- Um wieviele Prozentpunkte stieg die Zustimmungquote zwischen diesen beiden Wahlen?
- Um wie viel Prozent stieg die Zustimmungquote zwischen diesen beiden Wahlen?

### **Aufgabe 105**

Rechnen Sie mit dem aktuellen Umsatzsteuersatz von 19 %.

- Ein Produkt kostet ohne Umsatzsteuer 120 €. Berechnen Sie den Bruttopreis (Preis mit Einbezug der Umsatzsteuer) des Produktes.
- Ein Produkt kostet einschließlich Umsatzsteuer 148,15 €. Berechnen Sie den Nettopreis (Preis ohne Einbezug der Umsatzsteuer) des Produktes.

### **Aufgabe 106**

Ein Computer kostete ursprünglich 1795 €. Sein Preis wurde um 15 % gesenkt. Als ein neues Modell herauskam, wurde er noch einmal um 20 % billiger.

- Wie viel Euro kostete der Computer zuletzt?
- Um wie viel Prozent wurde der Preis insgesamt gesenkt?

### **Aufgabe 107**

Familie Burgner braucht einen neuen Kühlschrank.

- Im Katalog des Großhandels Qücks ist der Preis ohne Umsatzsteuer mit 739 € angegeben. Auf diesen Preis gibt es 30 % Rabatt, es kommen dann aber noch 19 % Umsatzsteuer hinzu. Wie viel Euro kostet der Kühlschrank bei Qücks?
- Frau Burgner erkundigt sich im Fachgeschäft Elektro-Jürgens. Dort soll der gleiche Kühlschrank 598 € (inklusive Umsatzsteuer) kosten. Bei Barzahlung gibt es 2 % Skonto. Wie viel Euro kostet der Kühlschrank dort bei Barzahlung?
- Schließlich entscheiden sie sich für einen Kühlschrank, auf den 20 % Rabatt gewährt wurden. Da sie bar bezahlen, erhalten sie noch zusätzlich 3 % Skonto auf den ermäßigten Preis und bezahlen am Ende 582 €.



- (i) Wie viel betrug der Preis vor Abzug von Rabatt und Skonto?
- (ii) Wie viel Prozent hat Familie Burgner jetzt insgesamt gespart?

### **Aufgabe 108**

Meerwasser hat einen Salzgehalt von 3,5 % (alle Prozentangaben in dieser Aufgabe beziehen sich auf das Gewicht).

- a) Der menschliche Geschmackssinn ist so empfindlich, dass Wasser mit 0,25 % Salzgehalt gerade noch als salzig wahrgenommen wird. Wie viel reines Wasser muß man zu 1 kg Meerwasser hinzufügen, um den Salzgehalt auf 0,25 % zu erniedrigen?
- b) In Frankreich wird an manchen Orten aus Meerwasser durch Verdunsten Salz gewonnen. Aus wie vielen Kilogramm Meerwasser erhält man 1 kg Salz?

### **Aufgabe 109**

- a) Man vergleiche die Kosten für einen Kredit über 15 000 € für ein Jahr:
  - (1) 6,5 % Zinsen, 300 € Bearbeitungsgebühr,
  - (2) 8,25 % Zinsen, keine Bearbeitungsgebühr,
  - (3) 7 % Zinsen, 100 € Bearbeitungsgebühr,
- b) 15 000 € werden jährlich mit 6 % verzinst. Man berechne das Endkapital mit Zinsen und Zinseszinsen nach fünf Jahren.

### **Aufgabe 110**

Messing ist eine Legierung (Mischung) aus Kupfer und Zink.

- a) Bei der Herstellung werden 90 kg Kupfer und 60 kg Zink zusammengeschmolzen. Wie viel Prozent Kupfer und wie viel Prozent Zink enthält die Legierung?
- b) Eine andere Sorte Messing soll 65 % Kupfer enthalten. Für die Legierung sollen 300 kg Kupfer verwendet werden. Wieviele Kilogramm Zink werden benötigt?
- c) Es werden 20 kg Messing mit einem Kupferanteil von 55 % mit 40 kg Messing mit einem Kupferanteil von 70 % zusammengeschmolzen. Wie viel Kilogramm Kupfer enthält die neue Legierung? Wie hoch ist der Anteil des Kupfers am Gesamtgewicht in Prozent?

### **Aufgabe 111**

Ein Rezept für 0,4 l Cocktail verlangt 0,08 l Rum mit einem Alkoholgehalt von 37,5 % (bezogen auf das Volumen) und hat ansonsten nur nichtalkoholische Zutaten.

- a) Welche Menge Alkohol enthält der Cocktail?
- b) Welche Menge Bier mit einem Alkoholgehalt von 4,9 % enthält die gleiche Menge Alkohol wie der Cocktail?

### **Aufgabe 112**

Eine Wasserpumpe fördert 10 l Wasser in 50 s.

- a) In wievielen Sekunden ist ein Behälter gefüllt, der 15 l Wasser faßt?
- b) Wie viel Wasser wird in 2 h gefördert?

### **Aufgabe 113**

Ein Tintenstrahldrucker hat eine qualitätsabhängige Druckleistung von 5–8 Seite pro Minute, wenn ein Dokument nur schwarz/weiß gedruckt wird, bei Farbausdrucken beträgt seine Leistung je nach Qualität 3–4 Seiten pro Minute.

- a) Wie viel Zeit muß man mindestens einplanen, um 20 Seiten zu drucken?
- b) Wie lange dauert es höchstens, bis ein Dokument, das aus 60 Seiten besteht, ausgedruckt ist?
- c) Wie viele Seiten werden in einer Stunde höchstens gedruckt?

### **Aufgabe 114**

Zum Streichen einer  $3\text{ m} \times 4\text{ m}$  großen Wand werden 2,4 kg Farbe benötigt. Dabei sind 5 kg Wandfarbe mit  $750\text{ cm}^3$  Wasser zu verdünnen.

- a) Wie viel Wasser benötigt man, um die für die Wand benötigte Farbmenge zu verdünnen?
- b) Wie viel Farbe kann man mit 2 l Wasser höchstens verarbeiten?
- c) Wie viel Farbe und wie viel Wasser benötigt man, um die Wände eines 3 m hohen Raumes zu streichen, dessen Grundfläche  $4\text{ m} \times 5\text{ m}$  ist?

### **Aufgabe 115**

Eine Radtour dauert sechs Tage, wenntäglich 56 km zurückgelegt werden.

- a) Wie viele Tage benötigt man bei einer täglichen Fahrstrecke von 84 km?
- b) Wie viele Kilometer müssen am Tag gefahren werden, wenn jede Etappe gleich lang sein soll und für die Radtour sieben Tage zur Verfügung stehen?

### **Aufgabe 116**

Zwei Mähdrescher bringen die Ernte eines Feldes in 12 h ein.

- a) Wie lange brauchen fünf Mähdrescher für die gleiche Ernte?
- b) In wie vielen Stunden ist die Ernte von fünf Feldern eingefahren, wenn drei Mähdrescher zur Verfügung stehen?

- c) Wie viele Felder können abgeerntet werden, wenn vier Mähdrescher jeweils 8 h im Einsatz sind?

### **Aufgabe 117**

Joghurt wird in 20 Becher zu je 150 g abgefüllt. Jeder Becher Joghurt kostet 0,29 €.

- a) Wie viele 250-Gramm-Becher kann man mit der gleichen Menge Joghurt füllen?  
b) Ein 250-Gramm-Becher kostet 0,47 €. Ist es günstiger, drei große oder fünf kleine Becher Joghurt zu kaufen?

### **Aufgabe 118**

In 8 h erzeugen vier Werkzeugmaschinen 960 Formteile. Wie viele Teile erzeugen drei dieser Maschinen in 5 h?

### **Aufgabe 119**

Der Lebensmittelvorrat eines Kreuzfahrtschiffes reicht für 120 Personen für genau 18 Tage. Nach 6 Tagen werden 24 Personen zusätzlich an Bord genommen. Wie lange reicht der Vorrat insgesamt?

### **Aufgabe 120**

Auf einer Teststrecke verbrauchen fünf PKWs des selben Typs auf einer Strecke von 280 km bei einer Testfahrt insgesamt 113,4 l Benzin.

- a) Wieviele Liter Benzin verbrauchen unter gleichen Bedingungen acht dieser PKWs auf einer Strecke von 350 km?  
b) Bei einer Testfahrt unter denselben Bedingungen verbrauchen 7 PKWs einer anderen Automarke auf einer 210 km langen Teststrecke zusammen 107,31 l Benzin. Welcher Autotyp hat den geringeren Durchschnittsverbrauch?

— Zusatzmaterial: Knobelaufgaben —

### **Aufgabe 121 (\*)**

- a) In der folgenden Addition stehen die Buchstaben für einzelne Ziffern (gleiche Buchstaben bedeuten stets gleiche Ziffern, verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern):  $ABBC + DADE = CEDAD$ . Finden Sie heraus, welche Rechnung durchgeführt wurde.  
b) Untersuchen Sie wie in Teil (a) die Addition  $ABCB + DBBA = CEFC$ .  
c) Warum kann die Rechnung  $2962 + 1164 = 4126$  nicht als Grundlage einer Aufgabe wie Teil (a) verwendet werden?

### Aufgabe 122 (\*)

Auf einem Tisch liegen 27 Streichhölzer. Zwei Spieler nehmen nun abwechselnd pro Zug mindestens ein Streichholz und höchstens vier Streichhölzer vom Tisch. Gewonnen hat derjenige, der am Ende eine gerade Anzahl von Streichhölzern besitzt.

- Zeigen Sie, dass der zuerst nehmende Spieler stets gewinnen kann, indem Sie eine Gewinnstrategie für diesen Spieler angeben.
- Gewinnt der zuerst nehmende Spieler auch dann stets, wenn zu Beginn 28, 29, 30, 31, 32 oder 33 Streichhölzer auf dem Tisch liegen?
- Das oben beschriebene Spiel soll nun für beliebige Anfangszahl von Streichhölzern untersucht werden. Überlegen Sie sich eine Darstellung der auftretenden Spielpositionen, und beschreiben Sie alle Positionen, von denen aus der am Zug befindliche Spieler eine Gewinnstrategie besitzt.
- Untersuchen Sie nun in ähnlicher Weise die Spielvariante, in der pro Zug mindestens ein Streichholz und höchstens drei Streichhölzer vom Tisch genommen werden dürfen.

### Aufgabe 123 (\*)

Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, das "Haus vom Nikolaus" ( $\hat{\times}$ ) ohne Absetzen des Stiftes und ohne mehrfaches Durchlaufen derselben Strecke zu zeichnen, wenn in der Ecke links oben unter dem Dach begonnen werden soll?

### Aufgabe 124 (\*)

Der Springer im Schachspiel zieht auf folgende Weise: zunächst ein Feld in gerader Richtung (vorwärts, rückwärts, nach links oder nach rechts) und dann unter weiterer Entfernung vom Startpunkt ein Feld in diagonaler Richtung. Geben Sie für die nachfolgenden Springer-Probleme jeweils entweder eine Lösung an oder zeigen Sie, dass keine Lösung existieren kann (es wird immer ein Springer auf einem Schachbrett der Größe  $8 \times 8$  betrachtet).

- Geben Sie eine Springerzugfolge an, die auf einem beliebigen Feld startet, auf demselben Feld endet und jedes Feld des Schachbretts mit Ausnahme des Startfeldes genau einmal berührt.
- Geben Sie eine Springerzugfolge an, die auf dem Feld unten links beginnt, auf dem Feld oben rechts endet und jedes Feld des Schachbretts genau einmal berührt.

— Zusatzmaterial: (Beweis-)Aufgaben zu Restklassen —

Es sei  $n > 1$  eine natürliche Zahl. Für eine ganze Zahl  $a \in \mathbb{Z}$  definieren wir

$$[a]_n := \{a + k \cdot n \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z}.$$

## Aufgabe 125

Zeigen Sie:  $[a]_n$  besteht aus allen ganzen Zahlen, die bei Division durch  $n$  denselben Rest wie  $a$  lassen.

Die Aufgabe zeigt: Es gibt nur  $n$  verschiedene solche Restklassen  $[a]_n$ . Wir können sie aufzählen durch die verschiedenen Rest  $0 \leq r < n$  bei Division durch  $n$ :

$$\begin{aligned} [0]_n &= \{k \cdot n \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ [1]_n &= \{1 + k \cdot n \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &\vdots \\ [n-1]_n &= \{(n-1) + k \cdot n \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{-1 + k \cdot n \mid k \in \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

Insbesondere ist z.B.  $[n] = [0]$ . Es gilt also  $\mathbb{Z} = [0] \dot{\cup} [1] \dot{\cup} \dots \dot{\cup} [n-1]$ .

Wann immer klar ist, mit welchem  $n$  wir arbeiten, lassen wir das Subskript  $n$  bei der Nebenklasse weg:  $[a] := [a_n]$ .

## Aufgabe 126

Wir definieren (für festes  $n$  wie oben) eine sogenannte Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $\mathbb{Z}$  durch

$$\forall a, b \in \mathbb{Z}: \quad a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad [a] = [b].$$

machen Sie sich klar, dass für alle  $a, b, c \in \mathbb{Z}$  gilt:

- $a \sim a$  (Reflexivität)
- $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$  (Symmetrie)
- $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$  (Transitivität)

Deswegen nennen  $[a]$  auch Rest- oder Äquivalenzklassen.

## Aufgabe 127

Zeigen Sie (für festes  $n$  wie oben) für alle  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ :

- Die Operation  $+$  gegeben durch  $[a] + [b] := [a + b]$  ist wohldefiniert.
- $[a] + [0] = [a + 0]$
- $[a] + [b] = [b] + [a]$
- $([a] + [b]) + [c] = [a] + ([b] + [c])$
- Zu  $[a]$  gibt es  $[b]$  mit  $[a] + [b] = [0]$ .

## Aufgabe 128

Zeigen Sie (für festes  $n$  wie oben) für alle  $a, b, c \in \mathbb{Z}$ :

- Die Operation  $\cdot$  gegeben durch  $[a] \cdot [b] := [a \cdot b]$  ist wohldefiniert.

b)  $[a] \cdot [1] = [a \cdot 1]$

c)  $[a] \cdot [0] = [0]$

d)  $[a] \cdot [b] = [b] \cdot [a]$

e)  $([a] \cdot [b]) \cdot [c] = [a] \cdot ([b] \cdot [c])$

f)  $([a] + [b]) \cdot [c] = [a] \cdot [c] + [b] \cdot [c]$  und  $[c] \cdot ([a] + [b]) = [c] \cdot [a] + [c] \cdot [b]$ .

### **Aufgabe 129**

Schreiben Sie alle Restklassen bei Division durch  $n$  auf und legen Sie eine Additions- und eine Multiplikationstabelle an für den Fall:

a)  $n = 2$ ,      b)  $n = 3$ ,      c)  $n = 4$ .

### **Aufgabe 130**

Es sei nun  $n > 1$  keine Primzahl. Zeigen Sie: Es gibt Restklassen  $[a]$  und  $[b]$  mit  $[a] \cdot [b] = [0]$ .

### **Aufgabe 131 (\*\*)**

Es sei nun  $n = p$  eine Primzahl. Zeigen Sie: Für alle Restklassen  $[a] \neq [0]$  gibt es  $[b]$  mit  $[a] \cdot [b] = [1]$ .