Vorkurs Mathematik–
Teil II. Analysis

Lehrstuhl A
für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Inhalt

1.1 Grundlegendes über Funktionen - Definition

Wir betrachten in diesem Teil des Vorkurses nur reelle Funktionen, d.h. Abbildungen von Teilmengen der reellen Zahlen in die Menge der reellen Zahlen.

Definition 1

Eine **(reelle) Funktion** $f : D \to \mathbb{R}$ *ist eine Abbildung einer (nichtleeren) Teilmenge* $D \subset \mathbb{R}$*, dem* **Definitionsbereich** *der Funktion, nach* $\mathbb{R}$*, dem* **Zielbereich** *der Funktion. Die Menge*

$$f(D) := \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in D\} \subset \mathbb{R}$$

heißt **Bild** *von* f.

1.2 Funktionen - Definitionsbereiche

Typische Definitionsbereiche von Funktionen sind:

(1) Die **Zahlbereiche**, die in $\mathbb{R}$ enthalten sind, also

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

(2) **Intervalle** reeller Zahlen, also

1. **abgeschlossene Intervalle**

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

2. **offene Intervalle**

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

3. sowie **halboffene Intervalle** der Form

$$\begin{aligned}
[a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \\
(a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},
\end{aligned}$$

wobei in allen Fällen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ die das Intervall definierenden Zahlen sind.

1.2 Funktionen - Definitionsbereiche

(3) **Unbeschränkte Intervalle** reller Zahlen, also

1. **abgeschlossene unbeschränkte Intervalle**

$$\begin{aligned} [a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}, \\ (-\infty, a] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}, \end{aligned}$$

2. **offene unbeschränkte Intervalle**

$$\begin{aligned} (a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}, \\ (-\infty, a) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}, \end{aligned}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl ist, die das jeweilige Intervall festlegt.

(4) Manchmal schreibt man auch $(-\infty, \infty)$ anstatt $\mathbb{R}$.

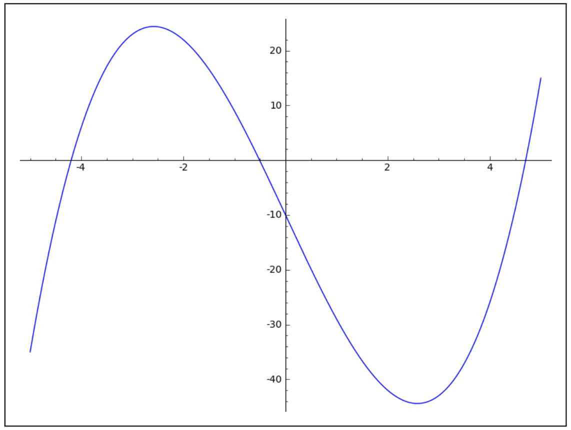
Definition 2

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die Teilmenge

$$\mathrm{graph}(f) := \{(x, f(x)) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, x \in D\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

des kartesischen Produktes von $\mathbb{R}$ mit sich selbst, heißt **Graph der Funktion** *f.*

Beispiel 1. Der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - 20x - 10$.



1.4 Grundlegendes über Funktionen – Summen und Produkte

Wir nutzen nun die Möglichkeit, reelle Zahlen zu addieren und zu multiplizieren, um Summen und Produkte von Funktionen zu definieren.

Definition 3

Seien $f : D_1 \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \to \mathbb{R}$ zwei reelle Funktionen.

(i) *Ist $D := D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, so ist die* **Summe** *$f + g : D \to \mathbb{R}$ von f und g definiert durch*

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x).$$

(ii) *Ist $D := D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$, so ist das* **Produkt** *$f\,g : D \to \mathbb{R}$ von f und g definiert durch*

$$(f\,g)(x) := f(x)g(x).$$

(iii) *Den Quotienten von zwei Funktionen können wir überall dort erklären, wo der Nenner nicht Null wird, d.h. ist $D := \{x \in D_1 \cap D_2 \,:\, g(x) \neq 0\} \neq \emptyset$, dann wird durch*

$$\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$$

eine Funktion $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ definiert, der **Quotient** *der Funktionen f und g.*

1.5 Grundlegendes über Funktionen - Monotonie

Um das Verhalten von Funktionen zwischen lokalen Extremwerten zu beschreiben, ist das folgende Konzept hilfreich.

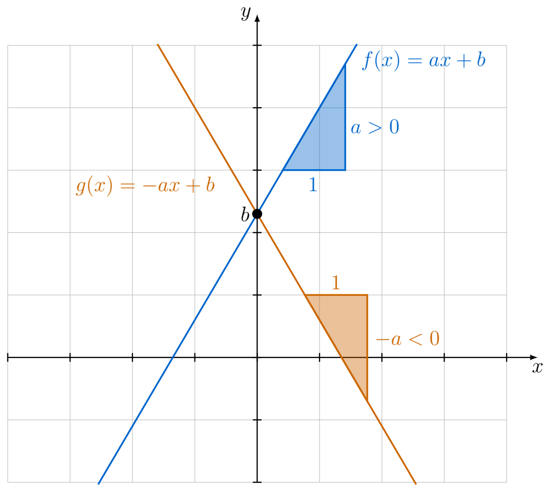
Definition 4

(1) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **monoton wachsend (fallend)**, *falls für $x, y \in D$ mit $x < y$ die Ungleichung $f(x) \leq f(y)$ ($f(x) \geq f(y)$) folgt.*
(2) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **streng monoton wachsend (fallend)**, *falls für $x, y \in D$ mit $x < y$ die Ungleichung $f(x) < f(y)$ ($f(x) > f(y)$) folgt.*

Strenge Monotonie impliziert (einfache) Monotonie, jedoch gibt es monotone Funktionen die nicht streng monoton sind.

Beispiel 2. Es sei $c \in \mathbb{R}$ beliebig (aber fest). Die konstante Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$, ist sowohl monoton wachsend als auch monoton fallend.
Sie ist aber weder streng monton wachend noch streng monoton fallend.

Denn sind $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$, dann gilt $f(x) = c = f(y)$. Also gilt erstrecht $f(x) \leq f(y)$ und $f(x) \geq f(y)$. Es gilt aber niemals $f(x) < f(y)$ oder $f(x) > f(y)$.



Beispiel 3. Die lineare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$, für feste $a, b \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ ist streng monoton wachsend für $a > 0$, und streng monoton fallend für $a < 0$.

Satz 1

Eine streng monotone Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist injektiv.

Beweis. Seien $x, y \in D$ mit $x \neq y$ beliebig. Ohne Einschränkung können wir dann annehmen, dass $x < y$ ist (sonst benennen wir die beiden Punkte einfach andersrum). Dann gilt entweder $f(x) < f(y)$ wenn f streng monoton wächst, oder $f(x) > f(y)$, wenn f streng monoton fällt. Damit ist $f(x) \neq f(y)$. Somit ist f injektiv. $\square$

Beispiel 4. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ ist streng monoton wachsend.

Sei $x < y$, zu zeigen ist $x^3 < y^3$.
Wir setzen $h := y - x > 0$ und berechnen

$$\begin{aligned} y^3 = (x+h)^3 &= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 \\ &= x^3 + h(3x^2 + 3xh + h^2) = x^3 + h\left[\frac{3}{4}x^2 + (\frac{9}{4}x^2 + 3xh + h^2)\right] \\ &= x^3 + \frac{3}{4}x^2h + (\frac{3}{2}x + h)^2 \\ &> x^3, \end{aligned}$$

denn $\frac{3}{4}x^2h \geq 0$ und $(\frac{3}{2}x + h)^2 \geq 0$; und falls der erste Term $\frac{3}{4}x^2h = 0$ ist, also wenn $x = 0$, dann ist der zweite Term gleich $h^2 > 0$.

Bemerkung: Wir könnten diese geschickte Umformung auch umgehen und eine Fallunterscheidung nach der Lage von x und y bzgl. 0 durchführen und die Eigenschaften der Relation „$<$“ benutzen.

2.1 Folgen - Motivation

Beispiel 5. Herr Meyer legt sein Geld G zu einem festen Zinssatz p an.
Nach 1 Jahr hat er das Guthaben $G_1 = (1+p) \cdot G$.
Nach 2 Jahren hat er das Guthaben $G_2 = (1+p) \cdot G_1 = (1+p)^2 G$.
...
Nach n Jahren hat er das Guthaben $G_n = (1+p) \cdot G_{n-1} = (1+p)^n G$.

G_1, G_2, G_3, ... bilden eine *Folge*, bei der die Glieder *rekursiv* aus den vorhergehenden berechnet werden, $G_n = (1+p) \cdot G_{n-1} = (1+p)^n G$.

Beispiel 6. $\sqrt{2}$ ist nicht als Bruch (rationale Zahl) darstellbar. Das bedeutet, dass $\sqrt{2}$ eine Dezimaldarstellung hat, die weder abbricht, noch irgendwann periodisch wird. Der Taschenrechner liefert für $\sqrt{2}$

$$1.414213562373095 = \frac{1414213562373095}{1000000000000000}.$$

Das ist ein Bruch, also nicht genau $\sqrt{2}$. Ein besserer Rechner liefert mehr Nachkommastellen. Ein Dezimalbruch ist also eine *Folge* von Brüchen, die die gemeinte Zahl immer genauer darstellen.

2.2 Folgen reeller Zahlen

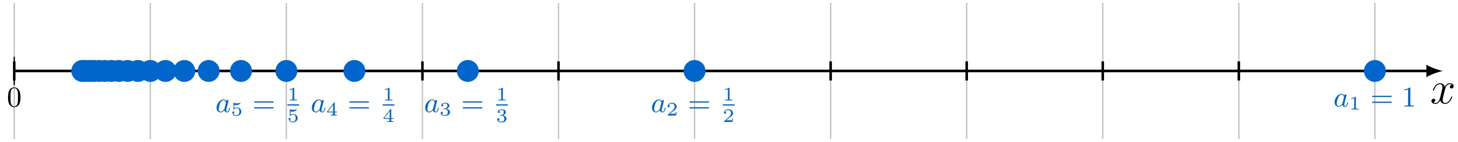
Definition 5

Eine **Folge reeller Zahlen** *ist eine Abbildung* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a(n)$.
Meistens schreiben wir eine Folge kurz als

$$(a_n)_{n\geq 1} \quad \textit{oder} \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}},$$

wobei $a_n := a(n)$. *Die Zahlen* a_n *heißen* **Folgenglieder**.

Beispiel 7. (i) Die Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ heißt *harmonische Folge*.
$a_1 = 1,\ a_2 = \frac{1}{2},\ a_3 = \frac{1}{3},\ a_4 = \frac{1}{4},\ a_5 = \frac{1}{5},\ \dots,\ a_n = \frac{1}{n},\ a_{n+1} = \frac{1}{n+1},\ \dots$



(ii) Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$: $1, 2, 3, \dots$

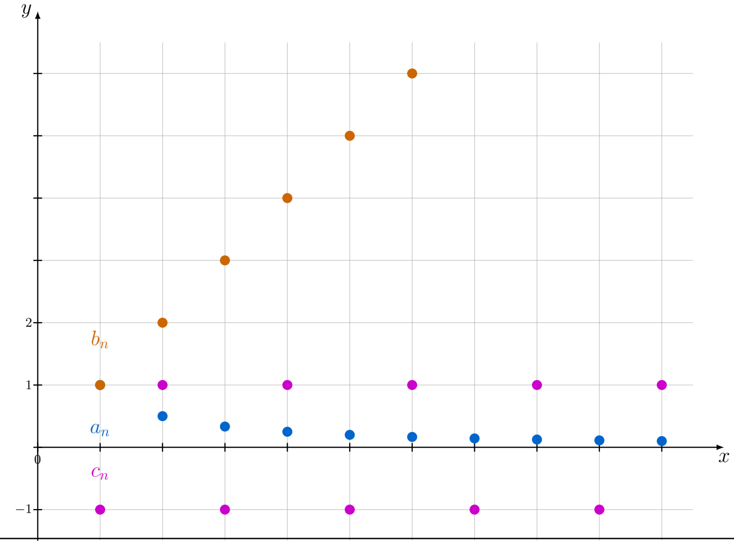
(iii) Die konstante Folge $(c)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $c \in \mathbb{R}$: $c, c, c, c, \dots$

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Definition 6

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ reeller Zahlen heißt **monoton wachsend/fallend**, *wenn sie das als Funktion $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $n \mapsto a_n$, ist.*

Beispiel 8. (i) $(a_n)_{n\geq 1} = (\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ ist monoton fallend.
(ii) $(b_n)_{n\geq 1} = (n)_{n\geq 1}$ ist monoton wachsend.
(iii) $(c_n)_{n\geq 1} = ((-1)^n)_{n\geq 1}$ ist weder monoton wachsend noch monoton fallend.



2.2 Folgen – Eigenschaften

Definition 7

Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ heißt (absolut) **beschränkt***, wenn es eine Zahl $C \geq 0$ gibt mit*

$$\forall n \in \mathbb{N} \;:\quad |a_n| \leq C.$$

Man nennt C eine (absolute) Schranke der Folge.
Wir verwenden auch: $(a_n)_{n\geq 1}$ heißt nach oben (nach unten) beschränkt, wenn ein $c \in \mathbb{R}$ existiert mit $a_n \leq c$ ($a_n \geq c$) für alle $n \in \mathbb{N}$, und nennen c obere (untere) Schranke.

Beispiel 9. (i) Die harmonische Folge $(a_n)_{n\geq 1} = (\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ ist beschränkt, denn $|\frac{1}{n}| \leq 1$.
(ii) Die Folge $(b_n)_{n\geq 1} = (n)_{n\geq 1}$ ist unbeschränkt, denn wäre C eine Schranke, dann fänden wir im Intervall $[C, C+1]$ eine natürliche Zahl m mit $C < m$. Widerspruch. Es gilt dann sogar für **alle** $n \geq m$, dass $C < n$.
Die Folge ist aber nach unten beschränkt, z.B. durch $c = 1$.
(iii) Die Folge $(c_n)_{n\geq 1} = ((-1)^n)_{n\geq 1}$ ist absolut beschränkt durch 1.

2.2 Konvergenz - Grenzwert

Definition 8

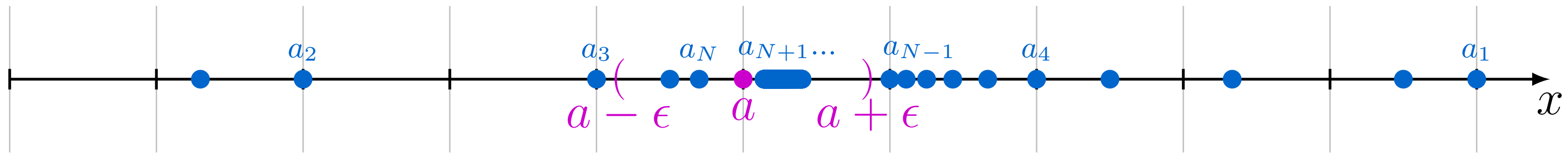
Eine Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ reeller Zahlen **konvergiert** *gegen die reelle Zahl a, wenn für jedes $\epsilon > 0$ gilt: Für alle großen n ist*

$$|a_n - a| < \epsilon \, .$$

Dann heißt a der **Grenzwert** *der Folge und wir schreiben*

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{oder} \quad a_n \xrightarrow{n\to\infty} a.$$

Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt **divergent***.*



Lehrstuhl A für Mathematik

RWTH AACHEN UNIVERSITY

2.2 Konvergenz - Grenzwert

(i) Konvergenz gegen a bedeutet, dass ab einem bestimmten N alle Folgeglieder a_n mit $n \geq N$ in dem Intervall $(a - \epsilon, a + \epsilon)$ liegen.

(ii) Für alle großen n heißt also genauer: Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es eine (von ϵ abhängige) Zahl $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - a| < \epsilon$.

Beispiel 10. Die harmonische Folge $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ konvergiert gegen den Grenzwert 0. Um das einzusehen, geben wir für jedes $\epsilon > 0$ ein $N = N(\epsilon)$ an, so dass die Konvergenzbedingung $|\frac{1}{n} - 0| < \epsilon$ erfüllt ist für alle $n \geq N$.
Zu $\epsilon > 0$ wählen wir dafür (irgend)eine natürliche Zahl $N > \frac{1}{\epsilon}$. Dann gilt für $n \geq N$:

$$|\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \epsilon.$$

Die Folge nähert sich dem Grenzwert 0 immer weiter an, nimmt aber den Wert selbst nie an.
Beispiel 11. Eine konstante Folge $(a_n)_{n\geq 1} = (c)_{n\geq 1}$ konvergiert gegen den Grenzwert $c \in \mathbb{R}$. Hier können wir sogar $N = 1$ für jedes $\epsilon > 0$ wählen, denn $|a_n - c| = |c - c| = 0 < \epsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beispiel 12. Die Folge $(b_n)_{1\geq 1} = (n)_{n\geq 1}$ divergiert. Um das zu sehen, nehmen wir an, wir hätten einen Grenzwert $b \in \mathbb{R}$. Dann gäbe es ganz bestimmt ein $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|b_N - b| = |N - b| < \frac{1}{2}$. Jetzt gehen wir ähnlich vor wie in Beispiel 9(ii). Jedes spätere Folgeglied $b_n = b_{N+k} = N + k$ (mit $k > 0$) liegt jenseits des Intervalls $(b - \frac{1}{2}, b + \frac{1}{2})$, denn

$$|b_n - b| = |N + k - b| > \frac{1}{2}.$$

Dann kann c aber nicht der Grenzwert gewesen sein. Widerspruch.

Satz 1

(i) Jede konvergente Folge ist beschränkt.
(ii) Jede Folge, die monoton und beschränkt ist, konvergiert.

Achtung! Die Umkehrungen dieser Aussagen sind falsch:
Nicht jede beschränkte Folge konvergiert. Beispiel: $b_n = (-1)^n$.
Nicht jede konvergente Folge ist monoton. Beispiel: $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

2.2 Konvergenz

Die anschauliche Bedeutung, dass *eine konvergente Folge ihrem Grenzwert beliebig nahe kommt*, muss mit etwas Vorsicht genossen werden.

Beispiel 13. Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit

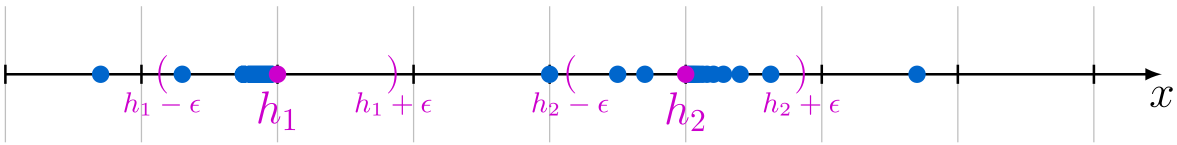
$$a_n := \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \text{ gerade} \\ n, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

kommt $a = 0 \in \mathbb{R}$ beliebig nahe, konvergiert aber nicht. Denn jedes zweite Folgeglied (für n ungerade) liegt zum Beispiel nicht im Intervall $(-1/2, 1/2)$. Also ist die Konvergenzbedingung für $\epsilon = 1/2$ nicht erfüllt. Damit konvergiert die Folge nicht gegen Null.
Die Folge kann auch gegen keinen anderen reellen Wert als Null konvergieren, denn die Folgeglieder a_{2n} wachsen über alle Grenzen, wie bereits in Beispiel 9(ii) bzw. 12 gesehen.
Der Punkt $a = 0$ aus diesem Beispiel spielt für die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ aber trotzdem eine Sonderrolle.

2.2 Konvergenz - Häufungspunkte

Definition 9

Ist $h \in \mathbb{R}$ eine Zahl, so dass für jedes feste $\epsilon > 0$ unendlich viele Glieder a_n der Folge innerhalb des Intervalls $(h - \epsilon, h + \epsilon)$ liegen, so heißt h **Häufungspunkt** *der Folge.*



- Jeder Grenzwert ist auch ein Häufungspunkt, aber nicht jeder Häufungspunkt ist auch ein Grenzwert, wie das Beispiel gezeigt hat.
- Eine Folge kann beliebig viele Häufungspunkte haben, aber höchstens einen Grenzwert.
- Ist a Grenzwert einer Folge, dann liegen alle bis auf (die ersten) endlich vielen Folgeglieder in jedem Intervall $(a - \epsilon, a + \epsilon)$.
- Ist h Häufungungspunkt einer Folge, so müssen lediglich unendlich viele Folgeglieder in jedem Intervall $(h - \epsilon, h + \epsilon)$ liegen.

Beispiel 14. Die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n := (-1)^n$ hat zwei Häufungspunkte $h_1 = 1$ und $h_2 = -1$. Daraus folgt bereits, dass die Folge divergiert.

2.3 Konvergenz - Die Grenzwertsätze

Die folgenden Grenzwertsätze erleichtern die Bestimmung von Grenzwerten ungemein, weil sie uns erlauben, aus bekannten Grenzwerten auf viele neue zu schließen, ohne die ϵ-Bedingung der Konvergenz-Definition jedes Mal nachprüfen zu müssen.

Satz 2 (Die Grenzwertsätze)

Seien $(a_n)_{n\geq 1}$, $(b_n)_{n\geq 1}$ konvergente Folgen mit $a = lim_{n\to\infty} a_n$, $b = lim_{n\to\infty} b_n$. Dann gilt:

(i) Die Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $c_n := a_n + b_n$ ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty} c_n = a + b$.

(ii) Die Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $c_n := a_n \cdot b_n$ ist konvergent mit $\lim_{n\to\infty} c_n = a \cdot b$.

(iii) Sind alle b_n und der Grenzwert b ungleich Null, so ist die Folge $(c_n)_{n\geq 1}$ mit $c_n := a_n/b_n$ konvergent mit $\lim_{n\to\infty} c_n = a/b$.

Um die Benutzung der Grenzwertsätze zu illustrieren, betrachten wir ein Beispiel.

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel 15. Wir betrachten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{3n^2+2}{n^2+6} = \frac{n^2(3+2/n^2)}{n^2(1+6/n^2)} = \frac{3+2/n^2}{1+6/n^2}.$$

Wir betrachten zunächst den Nenner: Sei $c_n := 1 + 6/n^2 \neq 0$. Nach Satz 2(i) gilt

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} 6/n^2,$$

wenn die beiden Grenzwerte rechts existieren. Nach Satz 2(ii) gilt aber

$$\lim_{n\to\infty} 6/n^2 = \lim_{n\to\infty} 6 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 6 \cdot 0 \cdot 0 = 1.$$

Es folgt also

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} 6/n^2 = 1 + 0 = 1.$$

Analog zeigt man für die Zählerfolge $b_n := 3 + 2/n^2$, dass $\lim_{n\to\infty} b_n = 3$. Dann folgt letztendlich mit Satz 2(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n = 3/1 = 3$.

Beispiel 16. Wir betrachten die **rekursiv definierte** Folge

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n} \text{ für } n \geq 1.$$

Die ersten Folgenglieder lauten

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{1} = \frac{3}{2} = 1.5, a_3 = \frac{17}{12} = 1.41\overline{6}, a_4 = \frac{577}{408} = 1.414215686\ldots.$$

Falls diese Folge gegen $a \neq 0$ konvergiert, dann muss a folgendes erfüllen:

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n}\right) \overset{\text{Satz 2}}{=} \frac{a}{2} + \frac{1}{a}.$$

Wir multiplizieren mit $a \neq 0$ und erhalten die quadratische Gleichung $a^2 = \frac{1}{2}a^2 + 1$, bzw. $a^2 = 2$. Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ kann also höchstens gegen $\pm\sqrt{2}$ konvergieren. Dabei können wir $-\sqrt{2}$ ausschließen, weil alle Folgeglieder positiv sind.
Den Beweis, dass die Folge tatsächlichen gegen ein $a \neq 0$ konvergiert, sparen wir uns hier. (Bereits a_4 bestimmt den exakten Wert $\sqrt{2}$ auf fünf Nachkommastellen genau.)

2.4 Konvergenz - Bedingte Divergenz

Es gibt noch einen besonderen Typ divergenter Folgen:

Definition 10

(1) Eine Folge heißt **bestimmt divergent gegen** $+\infty$*, wenn gilt: Zu jedem* $M \in \mathbb{R}$ *gibt es ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *mit* $a_n > M$ *für alle* $n \geq n_0$.

(1) Eine Folge heißt **bestimmt divergent gegen** $-\infty$*, wenn gilt: Zu jedem* $M \in \mathbb{R}$ *gibt es ein* $n_0 \in \mathbb{N}$ *mit* $a_n < M$ *für alle* $n \geq n_0$.

Wir können die Definition bestimmter Divergenz auch so formulieren durch: Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ ist bestimmt divergent gegen $+\infty$ $(-\infty)$, wenn für jede reelle Zahl $M \in \mathbb{R}$ nur endlich viele Glieder der Folge auf der Zahlengerade links von (rechts von) M liegen.

Beispiel 17. (i) Die Folge $(b_n)_{n\geq 1} = (n)_{n\geq 1}$ divergiert gegen $+\infty$, siehe Bsp. 9(ii).
(ii) Die Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ mit $a_n := \frac{2n^2}{n+1}$ divergiert bestimmt gegen $+\infty$.
Denn für alle n gilt $a_n = 2n - \frac{2}{n+1} > 2n \to +\infty$.

3.1 Funktionsgrenzwerte

Wir werden unser Wissen über Folgen und Konvergenz anwenden, um reelle Funktionen zu studieren.

Definition 11

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion. die Funktion hat für x gegen $x_0 \in \mathbb{R}$ den Grenzwert y_0, wenn gilt: Für **jede** *Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ in D, deren Folgeglieder $x_n \neq x_0$ sind und die gegen x_0 konvergiert, konvergiert die Folge der Funktionswerte $y_n = f(x_n)$ gegen y_0,*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0.$$

Man schreibt in diesem Fall auch kurz $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$.

Bemerkung.

- Hier muss x_0 nicht unbedingt zu D gehören. Insbesondere lassen wir „$x_0 = \pm\infty$“ zu.
- Selbst wenn $x_0 \in D$ gilt, muss nicht notwendig $F(x_0) = y_0$ gelten.
- Findet man auch nur eine einzige Folge $(x_n)_{n\geq 1}$, die die Bedingung verletzt, ist y_0 nicht der Funktionsgrenzwert in x_0.

3.2 Stetigkeit

Definition 12

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig im Punkt** *$x_0 \in D$, wenn ein Funktionsgrenzwert y_0 in x_0 existiert* **und** *dieser mit dem Wert $f(x_0)$ übereinstimmt, also wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x \neq x_n \in D$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0 = f(x_0) = f(\lim_{n\to\infty} f(x_n)),$$

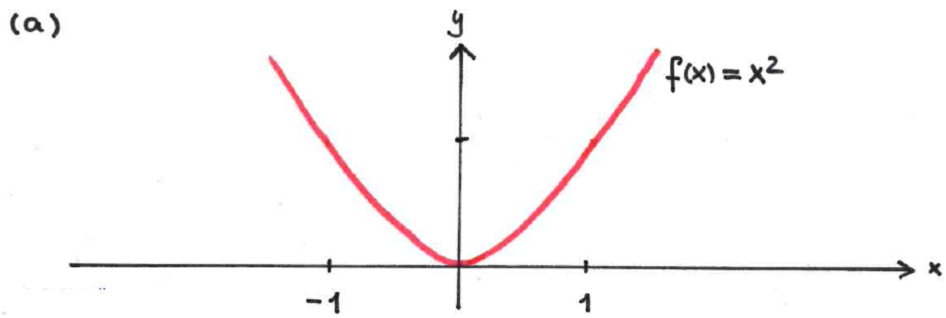
bzw. kurz

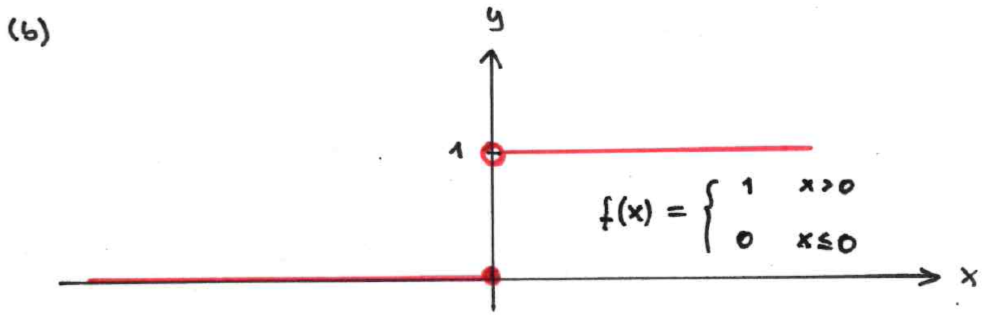
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Definition 13

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig**, *wenn Sie in jedem Punkt $x_0 \in D$ stetig ist.*

Beispiel 18.





(a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist stetig in $x_0 = 0$: Ist $(x_n)_{n\leq 1}$ eine *beliebige* Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, dann ist nach den Grenzwertsätzen

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \cdot 0 = 0 = f(x_0).$$

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in (b) ist nicht stetig in $x_0 = 0$: Es gibt nämlich zwei Folgen $(x_n)_{n\geq 1}$ und $(w_n)_{n\geq 1}$, die gegen Null konvergieren, so dass die Folgen $(f(x_n))_{n\geq 1}$ und $(f(w_n))_{n\geq 1}$ unterschiedliche Grenzwerte besitzen. Wählen wir nämlich $x_n := 1/n$ und $w_n := -1/n$, so folgt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} f(w_n).$$

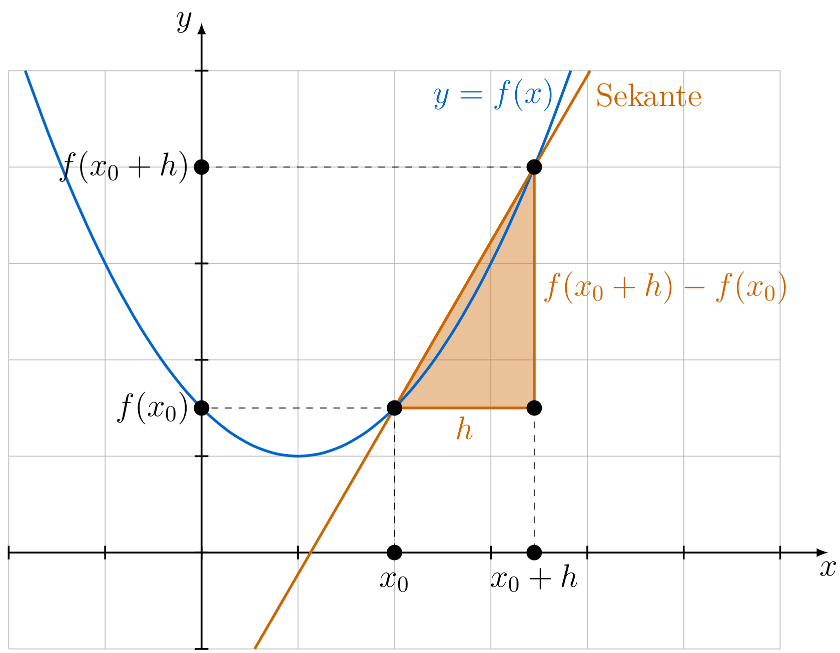
Diese Funktion ist aber stetig in jedem anderen Punkt $\tilde{x}_0 \neq 0$, denn für eine beliebige Folge $(x_n)_{n\geq 1}$ mit Grenzwert $\tilde{x}_0$ gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \left\{\begin{matrix} 1, & \tilde{x}_0 > 0 \\ 0, & \tilde{x}_0 < 0 \end{matrix}\right\} = f(\tilde{x}_0)$.

3.3 Differenzierbarkeit

Der Quotient

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

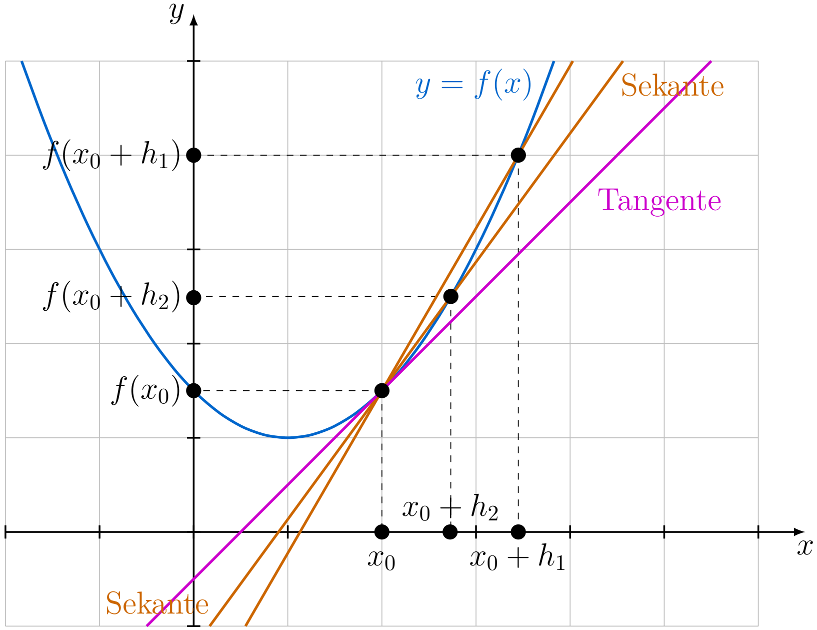
ergibt die Steigung der Sekante durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0+h, f(x_0+h))$ an die Funktion f.



Rutscht der der Punkt $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ für (betragsmäßig) kleiner werdendes h immer näher an den Punkt $(x_0, f(x_0))$, so erhalten wir – wenn alles gut geht – daraus die Steigung

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

der Tangente an die Funktion in x_0.



Definition 14

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar** *in $x_0 \in \mathbb{R}$, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\geq 1}$ mit $x_n \in D \setminus \{x_0\}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ auch die Folge*

$$y_n = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0}$$

konvergiert und deren Grenzwert für alle Folgen $(x_n)_{n\geq 1}$ derselbe ist. Der Grenzwert $f'(x) := \lim_{n\to\infty} y_n$ heißt dann die **Ableitung** *von f im Punkt $x_0 \in D$. Die Funktion heißt* **differenzierbar** *in D, wenn f differenzierbar ist in jedem Punkt $x_0 \in D$.*

Bemerkung.

(i) Die Folge $(y_n)_{n\geq 1}$ heißt auch **Folge der Differenzenquotienten**.

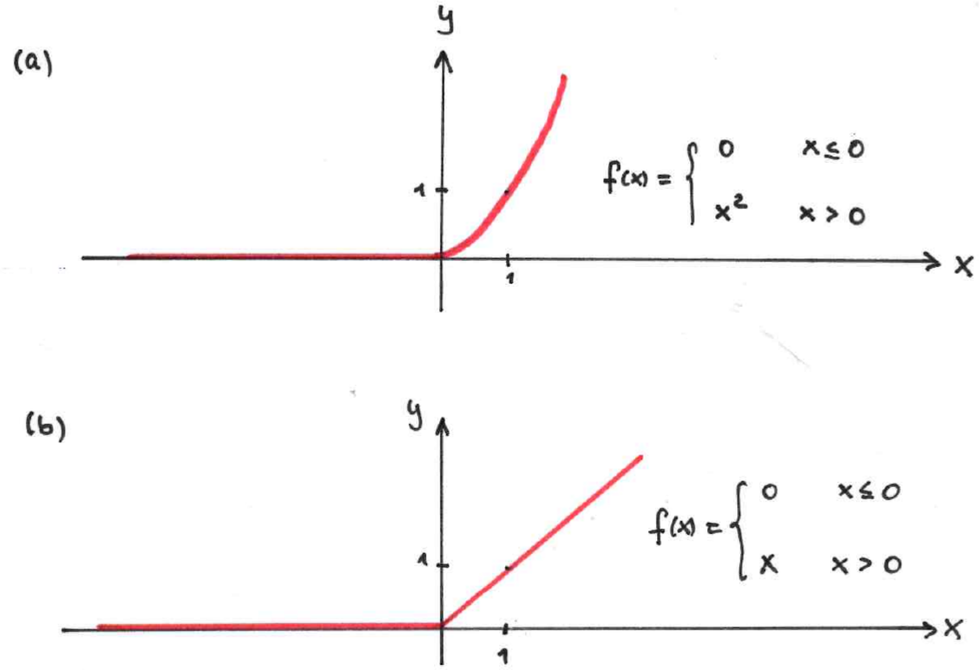
(ii) Die Ableitung konstanter Funktionen ist die Nullfunktion.

(iii) Aus den Grenzwertsätzen (Satz 2) folgt für zwei differenzierbare Funktionen f und g sofort: $(f+g)' = f' + g'$, sowie $(cf)' = c\,f'$, für alle Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

3.3 Differenzierbarkeit

Nicht jede Funktion ist differenzierbar. Differenzierbarkeit in einem Punkt besagt, dass dort eine eindeutige Tangente an die Funktion angelegt werden kann.

Beispiel 19. Hier ist (a) differenzierbar in $x_0 = 0$, (b) hingegen nicht.



(a) Die Funktion ist differenzierbar im Punkt $x = 0$, denn für jede Folge (x_n) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ gilt

$$\frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = \frac{f(x_n)}{x_n} = \begin{cases} \frac{x_n^2}{x_n} & , x_n > 0 \\ \frac{0}{x_n} = 0 & , x_n \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} x_n & , x_n > 0 \\ 0 & , x_n \leq 0 \end{cases}$$

Damit ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(0)}{x_n - 0} = 0$$

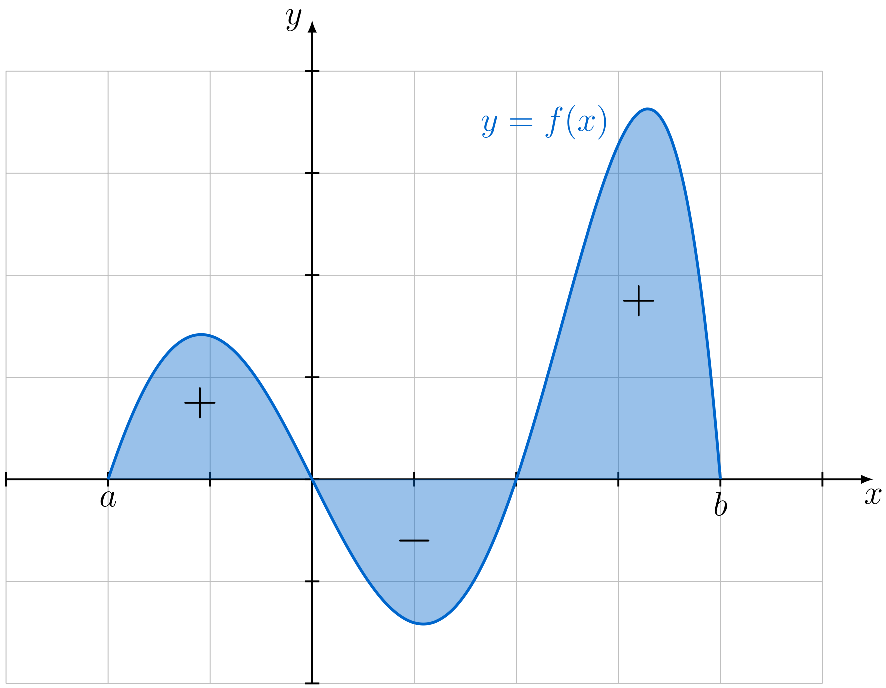
unabhängig von der speziellen Wahl der Folge.

(b) Die Funktion ist nicht differenzierbar in $x = 0$: Es gibt nämlich zwei Folgen $(x_n)_{n\geq 1}$ und $(w_n)_{n\geq 1}$, die gegen Null konvergieren, so dass die Folgen der Differenzenquotienten unterschiedliche Grenzwerte besitzen. Mit $x_n := 1/n$, $w_n := -1/n$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{f(w_n) - f(x)}{w_n - x}.$$

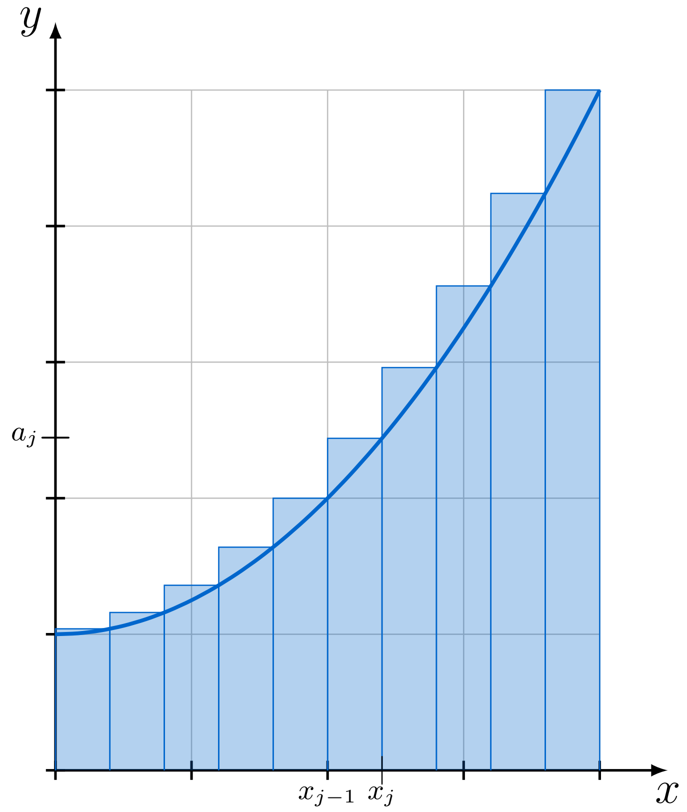
3.4 Das Integral stetiger Funktionen

Für eine stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ soll das **Integral** $\int_a^b f(x)\, dx$ den *orientierten Inhalt* der Fläche beschreiben, die der Funktionsgraph von f mit der x-Achse einschließt.



Wir erhalten diesen Flächeninhalt wieder durch einen Näherungsprozess.

3.4 Das Integral stetiger Funktionen



Die Fläche eines Balkens der Breite $x_j - x_{j-1}$ und der Höhe a_j ist $a_j(x_j - x_{j-1})$. Die Summe aller Balkenflächen ergibt eine Näherung des gesuchten Flächeninhalts.

3.4 Das Integral stetiger Funktionen

Definition 15

Sei $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes und abgeschlossenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Die n-te **Partialsumme**

$$S_n := \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} f\left(a + \frac{j}{n}(b-a)\right)$$

beschreibt die Fläche aus n Balken der Breite $\frac{b-a}{n}$, deren Höhen durch die Funktionswerte am rechten Intervallrand festgelegt werden.
Das **bestimmte Integral** *von f über das Intervall I ist der Grenzwert der Folge $(S_n)_{n\geq 1}$*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} S_n.$$

Bemerkung: Die Wahl des des rechten Intervallrands ist dabei willkürlich. Ebenso möglich ist irgendein Punkt innerhalb des Intervalls $[a + \frac{j-1}{n}(b-a), a + \frac{j}{n}(b-a)]$.

Lehrstuhl A für Mathematik

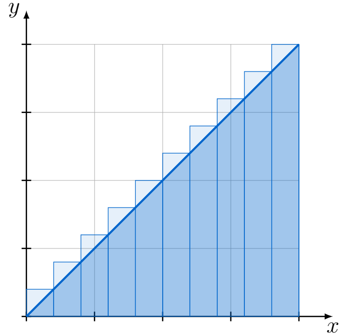
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Beispiel 20. Für das Integral $\int_0^b x\ dx$ bestimmen wir die n-te Partialsumme. Die Intervallbreite ist $\frac{b-0}{n} = \frac{b}{n}$, der Wert der Funktion $f(x)$ in $x_j = \frac{j \cdot b}{n}$ ist ebenfalls $f(x_j) = \frac{j \cdot b}{n}$. Also ist die n-te Partialsumme

$$S_n = \frac{b}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j) = \frac{b}{n}\sum_{j=1}^{n}(1 + \frac{jb}{n}) = \frac{b^2}{n^2}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{b^2}{2}(1 + \frac{1}{n}).$$

Somit ist das Integral

$$\int_0^b x\ dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b^2}{2}(1 + \frac{1}{n}) = \frac{b^2}{2}.$$



4.1 Differential- und Integralrechnung - Ableitung und Stammfunktion

Ableitungen und Integrale über die Definition mit Hilfe der Grenzwerte zu berechnen, ist meist sehr mühsam. Für die Differentiation gibt es Rechenregeln, die man durch den wichtigen Hauptsatz der Differential und Integralrechnung auch dazu benutzen kann, Integrale zu berechnen. Dazu benötigen wir zunächst den Begriff der Stammfunktion.

Definition 16

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Funktion $F : D \to \mathbb{R}$ heißt **Stammfunktion** *von f, wenn $F'(x) = f(x)$. Wir schreiben auch $F(x) = \int f(x)dx$ und nennen diesen Ausdruck* **unbestimmtes Integral**.

Bemerkung. Stammfunktionen sind aufgrund der Definition nur bis auf eine additive Konstante bestimmt. Ist nämlich $F'(x) = f(x)$, so ist auch

$$(F + c)' = F' + c' = F' + 0 = f \qquad \text{für alle } c \in \mathbb{R}.$$

Das heißt, mit $F(x)$ ist stets auch $F_c(x) := F(x) + c$ eine Stammfunktion.

Satz 2

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung *Eine stetige Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ besitzt eine Stammfunktion F, und es gilt für jedes Intervall $[a, b] \subset D$*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Insbesondere gilt, wenn $[a, x] \subset D$: Das bestimmte Integral $\int_a^x f(t)\,dt$ ist eine Stammfunktion von f.

Bemerkung.

- Diese Beziehung zwischen Ableitungen und Integralen ist an sich völlig überraschend.
- Welche Stammfunktion F auf der rechten Seite des Hauptsatzes verwenden, ist egal für die Berechnung dieses Integrals, denn mit einer anderen Stammfunktion F_c (wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig) gilt: $(F_c)(x) - (F_c)(a) = F(x) + c - (F(a) + c) = F(x) - F(a)$.
- Hier haben wir die Integrationsvariable mit t notiert. Sie verschwindet während des Integrationsprozesses, ihre Bezeichnung ist beliebig wählbar.

4.2 Differential- und Integralrechnung - Ableitungs- und Integrationsregeln

Aus der Schule kennen Sie Regeln zur Bestimmung der Ableitungen zusammengesetzter Funktionen, nämlich **Summen-**, **Produkt-** und **Kettenregel**. Aufgrund des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung gibt es für jede dieser Regeln eine entsprechende Regel für die Berechnung von Integralen.

Satz 3

Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen, so gilt für die Ableitung der Summe der beiden Funktionen $f + g : D \to \mathbb{R}$ die **Summenregel**

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Satz 4

Das bestimmte Integral ist **additiv**

$$\int_a^b (f' + g')(x)dx = f(b) - f(a) + g(b) - g(a).$$

4.2 Differential- und Integralrechnung - Produktformel/partielle Integration

Satz 5

Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen, so gilt für die Ableitung der Produktfunktion $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ die **Produktregel**

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'.$$

Wir können die Produktregel auch so verstehen, dass $f \cdot g$ die Stammfunktion von $f' \cdot g + f \cdot g'$ ist. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bedeutet dies $\int_a^b (f' \cdot g + f \cdot g')(x)dx = (f \cdot g)(b) - (f \cdot g)(a)$. Wenn wir den zweiten Summanden links auf die andere Seite bringen, erhalten wir:

Satz 6

Es gilt die Regel der **partiellen Integration**

$$\int_a^b (f' \cdot g)(x)\ dx = (f \cdot g)(b) - (f \cdot g)(a) - \int_a^b (f \cdot g')(x)\ dx.$$

Beispiel 21. Gesucht ist das Integral

$$\int_0^1 xe^x \, dx \, .$$

Wir machen den Ansatz $u(x) = x$, $v'(x) = e^x$. Da die Ableitung der Exponentialfunktion die Exponentialfunktion selber ist, ist die Stammfunktion von v' die Funktion $v(x) = e^x$. Mit $u'(x) = 1$ folgt also mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x dx &= \int_0^1 u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)|_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x)dx \\ &= xe^x|_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= 1e^1 - 0e^0 - e^x|_0^1 = e - (e-1) = 1. \end{aligned}$$

Eine Stammfunktion von $f(x) = xe^x$ erhalten wir, indem wir x statt der oberen Intervallgrenze 1 einsetzen: $F(x) = xe^x - e^x - 1$.
Umgekehrt sieht man mit Hilfe der Produktregel $(xe^x - e^x + c)' = xe^x$.

4.2 Differential- und Integralrechnung - Kettenregel/Integration durch Substitution

Satz 7

Sind $g : D_1 \to \mathbb{R}$, $f : D_2 \to \mathbb{R}$ zwei differenzierbare Funktionen mit $g(D_1) \subset D_2$, so gilt für die Ableitung der Komposition $f \circ g : D_1 \to \mathbb{R}$ die **Kettenregel**

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Wir können die Kettenregel auch so lesen, dass $(f \circ g)(x)$ die Stammfunktion von $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ ist. Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung bedeutet dies:

Satz 8

Es gilt die Regel der **Integration durch Substitution**

$$\int_a^b f'(g(x)) \cdot g'(x) dx = f(g(b)) - f(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(b)} f'(u) du.$$

Beispiel 22. Gesucht ist das Integral

$$\int_0^1 xe^{x^2} dx \; .$$

Wir machen den Ansatz $f(u) = e^u$, $g(x) = x^2$, denn wir erkennen $\frac{1}{2}g'(x) = x$. Hier ist g für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert mit $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_0^+$. Da die Exponentialfunktion für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert ist, ist die Komposition $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^{x^2}$, wohldefiniert. Da die Ableitung der Exponentialfunktion die Exponentialfunktion selber ist, $f'(u) = f(u)$, folgt mit der Kettenregel

$$(e^{x^2})' = f'(g(x))g'(x) = f'(x^2) \cdot 2x = e^{x^2} 2x = 2xe^{x^2}.$$

Daraus folgt

$$\int_0^1 xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2} \left[e^{x^2} \Big|_0^1 \right] = \frac{1}{2}(e^{1^2} - e^{0^2}) = \frac{e-1}{2}.$$

4.3 Differential- und Integralrechnung - Höhere Ableitungen

Definition 17

(1) Eine differenzierbare Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **stetig differenzierbar**, *wenn die Ableitung $f' : D \to \mathbb{R}$ stetig ist.*
(2) Ist die Ableitung $f' : D \to \mathbb{R}$ einer differenzierbaren Funktion wieder differenzierbar, so heißt ihre Ableitung $f'' := (f')' : D \to \mathbb{R}$ die **zweite Ableitung** *von f.*

Indem wir diese Methode iterieren, können wir bei ausreichender Differenzierbarkeit der Ausgangsfunktion beliebig hohe Ableitungen konstruieren.

Definition 18

(1) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **n-mal differenzierbar**, *wenn die Ableitungen $f, f', f'', f''' = (f'')', \ldots, f^{(n-1)} := (f^{(n-2)})'$ differenzierbar sind. Mit $f^{(k)} : D \to \mathbb{R}$ wird die* **k-te Ableitung** *von f bezeichnet.*
(2) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt **n-mal stetig differenzierbar**, *wenn f n-mal differenzierbar ist und die Ableitung $f^{(n)}$ stetig ist.*

Sei $S \subset \mathbb{R}$ eine Teilmenge.

Definition 19

(1) Enthält S ein größtes Element M (d.h. $M \in S$ und $s \leq M$ für alle $s \in S$), so nennen wir M das **Maximum von S** *(oder das maximale Element von S) und schreiben $M = \max S$.*
(2) Enthält S ein kleinstes Element m (d.h. $m \in S$ und $s \geq m$ für alle $s \in S$), so nennen wir m das **Minimum von S** *(oder das minimale Element von S) und schreiben $m = \min S$.*

Bemerkung. (1) Eine Menge, die ein Maximum und Minimum besitzt, ist beschränkt. Die Umkehrung gilt nicht.
(2) Alle endlichen Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind beschränkt und besitzen ein Minimum und ein Maximum.

Beispiel 23. (Maxima und Minima)

(1) Für $S_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ gilt $\min S_1 = 1$ und $\max S_1 = 5$.

(2) Für $S_2 = \{n \in \mathbb{Z} : -4 < n \leq 100\}$ gilt $\min S_2 = -3$ und $\max S_2 = 100$.

(3) Die Menge $S_3 = (a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ hat kein Minimum, aber ihr Maximum ist b.

(4) Die Menge $S_4 = \{r \in \mathbb{Q} : 0 \leq r \leq \sqrt{2}\}$ hat 0 als Minimum aber kein Maximum. Das liegt daran, daß $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist. In S_4 gibt es aber rationale Zahlen, die beliebig nahe an $\sqrt{2}$ liegen.

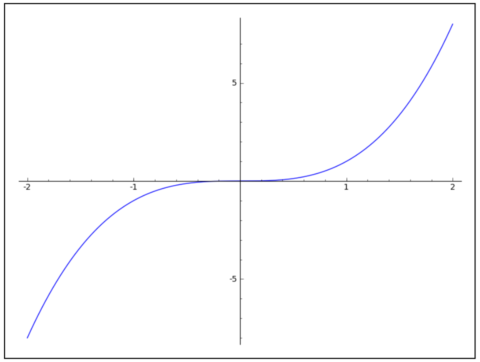
(5) Das Minimum der Menge $[2, \infty)$ ist 2, die Menge besitzt kein Maximum.

(6) Die Menge $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ besitzt weder ein Minimum noch ein Maximum.

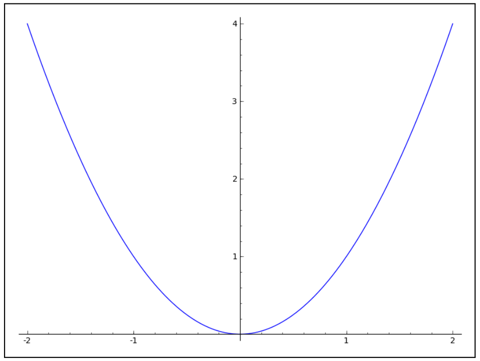
Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

Definition 20

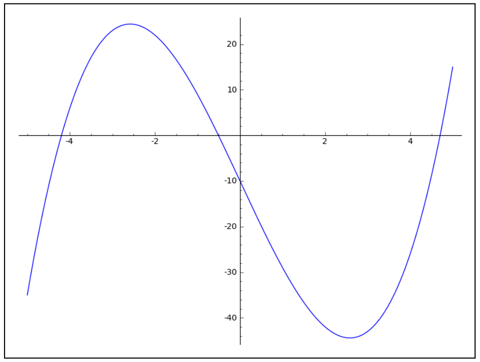
(i) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ besitzt ein **globales Maximum (Minimum)**, *wenn das Bild $f(D) \subset \mathbb{R}$ ein Maximum (Minimum) besitzt.*
(ii) Ein Element $x \in D$ heißt **globale Maximalstelle (Minimalstelle)** *der Funktion f, wenn der Funktionswert $f(x)$ von x das Maximum (Minimum) von $f(D)$ ist. $f(x)$ heißt* **globaler Maximal- bzw. Minimalwert**.
(iii) Ein Element $x \in D$ heißt **lokale Maximalstelle (Minimalstelle)** *der Funktion f, wenn es ein offenes Intervall $I \subset D$ mit $x \in I$ gibt, so dass der Funktionswert $f(x)$ von x das Maximum (Minimum) von $f(I)$ ist.*
Oft nennt man $f(x)$ lokalen Maximalwert (lokalen Minimalwert), und sagt $f(x)$ habe in x ein lokales Maximum (lokales Minimum).



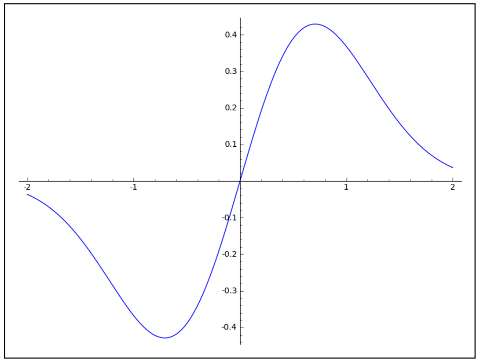
(a) $x \mapsto x^3$



(b) $x \mapsto x^2$



(c) $x \mapsto x^3 - 20x - 10$



(d) $x \mapsto xe^{-x^2}$

(a) keine Extrema. (b) ein globales Minimum. (c) je ein lokales Maximum und Minimum. (d) je ein globales Maximum und Minimum.

Abschließend betrachten wir die Kriterien für die Erkennung lokaler Extremwerte differenzierbarer Funktionen.

Satz 9

Sei $a < b$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar.

(i) **Notwendiges Kriterium** *Ist $x_0 \in (a, b)$ ein lokales Minimum oder lokales Maximum von f, so ist $f'(x_0) = 0$.*

(ii) **Hinreichendes Kriterium** *Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$ (> 0), so ist x_0 ein lokales Maximum (Minimum) von f.*

Mit Hilfe dieses Kriteriums können wir eine Funktion durch Angabe der Extremstellen und der Monotonieeigenschaften zwischen den Extremstellen beschreiben **(Kurvendiskussion)**.

5.1 Elementare Funktionen - Beispiele

Wir betrachten hier eine Reihe wichtiger Beispiele von Funktionen. Sie werden Ihnen aus der Schule bekannt sein.
Diese Funktionen werden oft als elementare Funktionen bezeichnet, weil sie die wichtigsten Bausteine sind, aus denen reelle Funktionen zusammengesetzt werden können.

Wir geben dabei stets die Abbildungseigenschaften, den Graph der Funktion, Ableitung und Stammfunktion, und gegebenenfalls die Umkehrfunktion an und benennen etwaige Besonderheiten.
Die meisten Aussagen werden wir ohne Beweise postulieren.
Zum Beispiel werden die **Potenz- und Wurzelfunktionen** für rationale Exponenten aus den Grundlagen als bekannt vorausgesetzt.

5.2 Polynomfunktionen

Definition 21

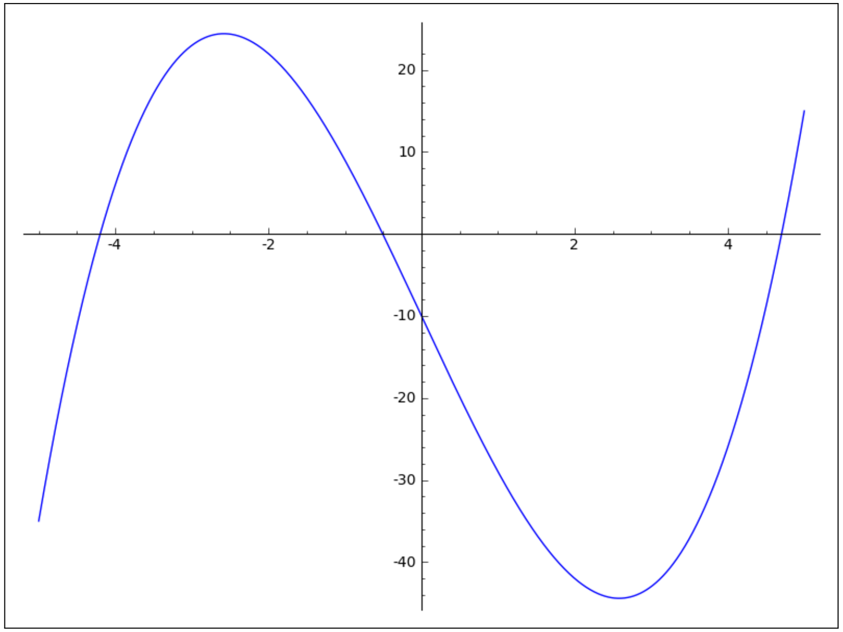
Eine **Polynomfunktion** $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vom Grad* $n \in \mathbb{N}_0$ *ist eine Funktion mit*

$$x \mapsto p(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

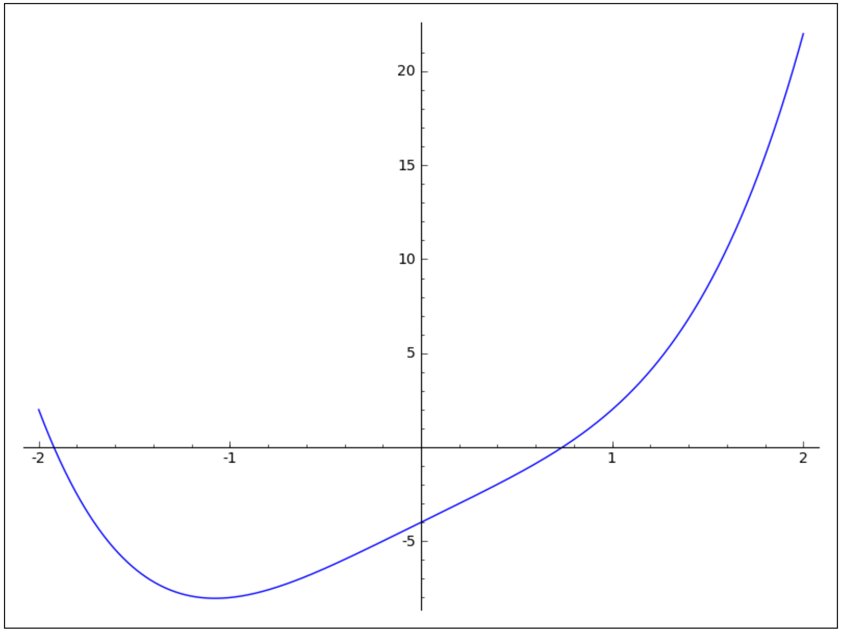
mit festen Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. *Wir schreiben* $n = \mathrm{grad}(p)$.

Definitionsbereich	$\mathbb{R}$ ohne die Nullstellen des Nennerpolynoms
Stetigkeit	überall stetig
Differenzierbarkeit	überall beliebig oft differenzierbar
Ableitung	$p'(x) = \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$
Stammfunktion	$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}$
Monotonie	im Allgemeinen keine
Bild	für n ungerade ist $p(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, sonst keine allg. Aussage möglich
Nullstellen	maximal n reelle Nullstellen, für n ungerade mindestens eine

5.2 Polynomfunktionen



(a) $x \mapsto x^3 - 20x - 10$



(b) $x \mapsto x^4 + 5x - 4$

Eine Polynomfunktion vom Grad 0 ist konstant (und ungleich Null), vom Grad 1 ist eine lineare Funktion und vom Grad 2 ist eine quadratische Funktion (Parabel). Das Nullpolynom hat keinen Grad.

5.2 Polynomfunktionen – Polynomdivison

Additiert oder multipliziert man Polynome miteinander, so erhält man wieder ein Polynom: Ist $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_x^k$ und $q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k$ so ist

$$(p+q)(x) = \sum_{k=0}^{\max\{m,n\}} (a_k + b_k)x^k \quad \text{und} \quad (p \cdot q)(x) = \sum_{j=0}^{n+m} \left(\sum_{k=0}^{j} a_k b_{j-k} \right) x^k,$$

wobei die ggf. nicht im Voraus definierten Koeffizienten a_k für $k > n$ bzw. b_k für $k > m$ gleich Null gesetzt wurden.
Mit Polynomen kann man ebenso wie mit ganzen Zahlen Division mit Rest betreiben:

Satz 10

Sind p und $q \neq 0$ zwei Polynome, dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome f und r so, dass

$$p = f \cdot q + r\,,$$

wobei $\mathrm{grad}(r) < \mathrm{grad}(q)$ oder sogar $r \equiv 0$ gilt.

5.2 Polynomfunktionen – Polynomdivison

- Das Polynom f hat entweder den Grad $\mathrm{grad}(f) = \mathrm{grad}(p) - \mathrm{grad}(q)$ oder es gilt $f \equiv 0$.
- Die Gleichung $p = f \cdot q + r$ lässt sich außerhalb der Nullstellen von q umformen zu $\frac{p}{q} = f + \frac{r}{q}$.

Beispiel 24. (i) Für $p(x) = x^3 - 8$ und $q(x) = x - 2$ finden wir

$$(x^3 - 8) : (x - 2) = x^2 + 2x + 4.$$

Also ist $f(x) = x^2 + 2x + 4$ und $r \equiv 0$.

(ii) Für $p(x) = 3x^5 + 4x^2 + 2x + 1$ und $q(x) = x^2 + 2x + 1$ erhalten wir

$$(3x^5 + 4x^2 + 2x + 1) : (x^2 + 2x + 1) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 9 + \frac{13x + 8}{x^2 + 2x + 1},$$

also $r(x) = 13x + 8$ und $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 7x - 9$.

(iii) Im Fall $\mathrm{grad}(p) < \mathrm{grad}(q)$ gilt $f = 0$ und $r = p$, denn offenbar gilt die Gleichung

$$p = 0 \cdot q + p.$$

5.2 Polynomfunktionen – Nullstellen

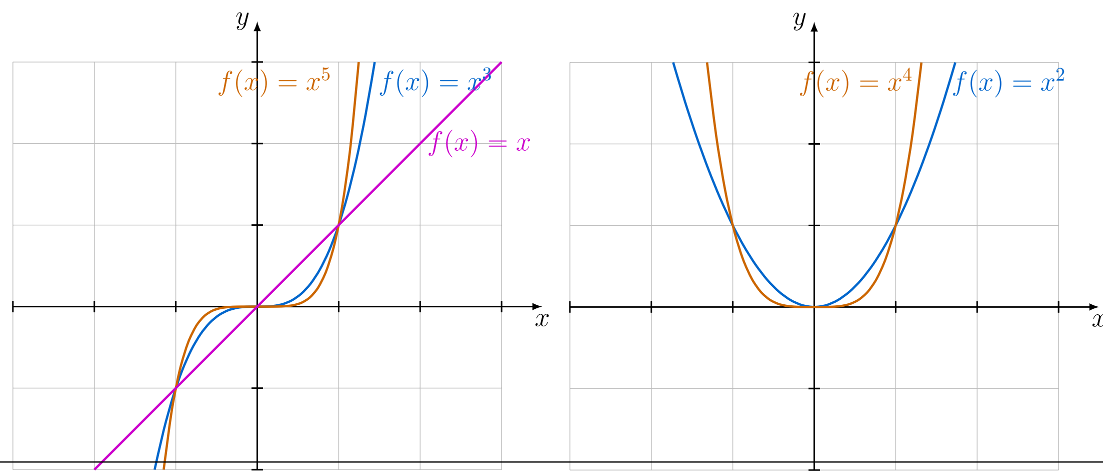
Ist x_0 eine Nullstelle eines Polynoms p, also $p(x_0) = 0$, dann kann man per Polynomdivision den **Linearfaktor** $(x - x_0)$ von p abspalten, d.h. es gibt ein Polynom q mit $\operatorname{grad}(q) = \operatorname{grad}(p) - 1$ und

$$p(x) = q(x) \cdot (x - x_0)\,.$$

Ist x_0 auch eine Nullstelle von q, dann kann man wiederum von q einen Linearfaktor abspalten, $p(x) = q(x) \cdot (x - x_0) = q_2(x) \cdot (x - x_0)^2$, etc. so lange, bis

$$p(x) = q_k(x) \cdot (x - x_0)^k, \text{ wobei } q_k(x_0) \neq 0.$$

Dann heißt x_0 eine k-fache Nulstelle von p.



5.3 Rationale Funktionen

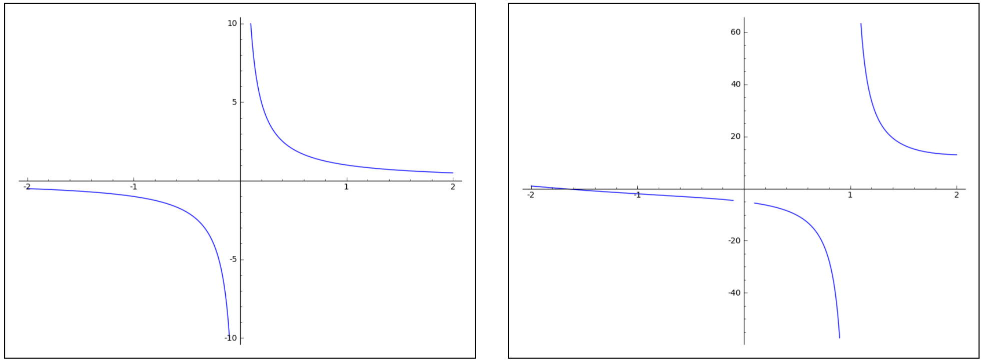
Definition 22

Sind $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *und* $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *Polynomfunktionen mit* $\operatorname{grad}(q) \geq 1$, *so ist eine* **rationale Funktion** $r : \{x \in \mathbb{R} \,:\, q(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ *gegeben durch den Quotienten*

$$x \mapsto r(x) := \frac{p(x)}{q(x)}.$$

Definitionsbereich	$\mathbb{R}$ ohne die Nullstellen des Nennerpolynoms q
Stetigkeit	stetig im Definitionsbereich
Differenzierbarkeit	beliebig oft differenzierbar im Definitionsbereich
Ableitung	$r' = \frac{p'q - pq'}{q^2}$
Stammfunktion	keine allgemeine geschlossene Formel
Monotonie	im Allgemeinen keine
Bild	keine allgemeine Aussage möglich
Nullstellen	maximal soviele wie das Zählerpolynom

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY



(a) $x \mapsto 1/x$ (b) $x \mapsto \frac{x^4+5x}{x^2-x}$

Bemerkung.

(i) Ist $x_0 \in \mathbb{R} \setminus D$ eine Definitionslücke mit $\lim_{x \to x_0} |r(x)| = \infty$, dann heißt x_0 eine **Polstelle** von r.
Beispiel: $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ hat eine Polstelle in $x = 1$.

(ii) Eine Definitionslücke, in die die Funktion stetig fortgesetzt werden kann, heißt **hebbare Singularität**.
Beispiel: $r(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ hat in $x = 1$ eine hebbare Singularität. Für alle $x \neq 1$ gilt nämlich $r(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1$. Der letzte Ausdruck ist auch für $x = 1$ wohldefiniert. Somit kann man durch $r(1) := 2$ die Funktion stetig in $x = 1$ fortsetzen.

5.3 Rationale Funktionen – Partialbruchzerlegung

Besitzt der Nenner $q(x)$ einer rationalen Funktion $r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ eine Produktzerlegung $q(x) = q_1(x) \cdot q_2(x)$ in zwei Polynome $q_1(x)$, $q_2(x)$, dann sucht man Polynome $A_1(x)$, $A_2(x)$ so, dass

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1(x)}{q_1(x)} + \frac{A_2(x)}{q_2(x)}, \tag{1}$$

wobei für die Grade gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}(A_1) + \operatorname{grad}(q_2) &\leq \operatorname{grad}(p), \\ \operatorname{grad}(A_2) + \operatorname{grad}(q_1) &\leq \operatorname{grad}(p). \end{aligned}$$

Satz 11

Sind die Polynome q_1, q_2, teilerfremd, so ist die Partialbruchzerlegung (1) eindeutig bestimmt.

Die Polynome A_1, A_2 lassen sich einfach bestimmen, indem man in (1) die rechte Seite auf den Hauptnenner bringt und mit der linken vergleicht:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{q_1(x)q_2(x)}\frac{A_1(x)}{q_1(x)} + \frac{A_2(x)}{q_2(x)} = \frac{A_1(x)q_2(x) + a_2(x)q_1(x)}{q_1(x)q_2(x)},$$

was genau dann erfüllt werden kann, wenn

$$p(x) \;=\; A_1(x)q_2(x) + a_2(x)q_1(x)\,.$$

Beispiel 25. In $\frac{x+5}{x^2-2x-3} \overset{?}{=} \frac{A_1(x)}{x-3} + \frac{A_2(x)}{x+1}$ sind offenbar $x = 3$ und $x = -1$ Nullstellen des Nenners. Weil $\mathrm{grad}(A_1) + 1 \leq 1$ und $\mathrm{grad}(A_2) + 1 \leq 1$ erfüllt sein soll, müssen A_1 und A_2 konstante Polynome sein, für die wir folgende Bedingung erhalten:

$$x + 5 \;=\; A_1(x+1) + A_2(x-3) \;=\; (A_1 + A_2)x + A_1 - 3A_2\,.$$

Koeffizientenvergleich ergibt $A_1 + A_2 = 1$ und $A_1 - 3A_2 = 5$. Dieses Gleichungssystem hat genau die Lösung $A_1 = 2$ und $A_2 = -1$. Wir berechnen damit ein Integral:

$$\begin{aligned}\int_4^5 \frac{x+5}{x^2-2x-3}dx = \int_4^5 \left(\frac{2}{x-3} - \frac{1}{x+1}\right)dx \;&=\; 2\ln(x-3)\,\big|_4^5 - \ln(x+1)\,\big|_4^5 \\ &=\; \ln(4) - \ln(6) + \ln(5)\,.\end{aligned}$$

5.4 Exponentialfunktionen

Mit Hilfe der Potenzgesetze haben wir für $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, die Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := a^x$ erklärt. Wir haben gesehen, dass diese Funktion für $x, y \in \mathbb{Q}$ die folgenden Eigenschaften hat:

(i) Sie erfüllt **Funktionalgleichung** $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.

(ii) Es gilt $a^1 = a$.

Es gibt aber tatsächlich für festes a sehr viele Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften (i) und (ii). Um die Funktionen der Form $x \mapsto a^x$ zu einer Basis $a > 0$ auf den reellen Zahlen eindeutig festzulegen, fordern wir, dass sie **stetig** auf ganz $\mathbb{R}$ sein soll.

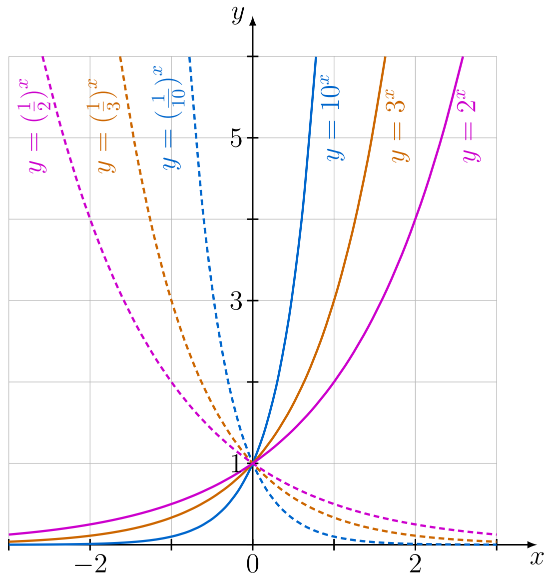
Satz 12

Zu jedem $a > 0$ gibt es genau eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x + y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{und} \quad f(1) = a.$$

Sie stimmt auf $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ mit der Funktion $x \mapsto a^x$ überein. Wir benutzen deswegen dieselbe Bezeichnung für die Funktionsvorschrift.

5.4 Exponentialfunktionen



Aus verschiedenen Gründen spielt aber die Funktion $x \mapsto e^x$ zur Basis $e = 2.7182\ldots$ (**Eulersche Zahl**) eine Sonderrolle. Die Zahl $e \in \mathbb{R}$ ist irrational und kann durch den Grenzwert

$$e := \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

charakterisiert werden.

Lehrstuhl A für Mathematik

5.4 Exponentialfunktionen

Definition 23 (Exponentialfunktion)

Die eindeutig bestimmte **stetige** *Funktion* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *mit den Eigenschaften*

$$\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y), \ \exp(1) = e,$$

heißt **natürliche Exponentialfunktion**. *Wir bezeichnen die Funktionsvorschrift mit* $x \mapsto \exp(x)$ *oder* $x \mapsto e^x$.

Definitionsbereich	$\mathbb{R}$
Stetigkeit	überall stetig
Differenzierbarkeit	überall beliebig oft differenzierbar
Ableitung	$f'(x) = \exp(x)$
Stammfunktion	$F(x) = \exp(x)$
Monotonie	streng monoton wachsend
Bild	$\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$
Nullstellen	keine

5.5 Logarithmusfunktionen

Für $y \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Gleichung $\exp(x) = y$. Da das Bild der Exponentialabbildung $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ ist, folgt:

Lemma 3

Ist $y \leq 0$, so besitzt die Gleichung $\exp(x) = y$ keine Lösung, d.h. $\{x \in \mathbb{R} : \exp(x) = y\} = \emptyset$.

Da die Exponentialabbildung streng monoton wachsend ist, ist sie nach Satz 1 injektiv und somit bijektiv als Abbildung $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$. Damit besitzt sie eine Umkehrabbildung $\phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$. Aufgrund der Eigenschaft einer Umkehrabbildung gilt $\phi(y) = \phi(\exp(x)) \overset{!}{=} x$ und somit gilt:

Lemma 4

Ist $y > 0$, so hat die Gleichung $\exp(x) = y$ genau eine Lösung, die durch die Umkehrfunktion von $\exp$ gegeben wird, d.h. $\{x \in \mathbb{R} : \exp(x) = y\} = \{\phi(y)\}$.

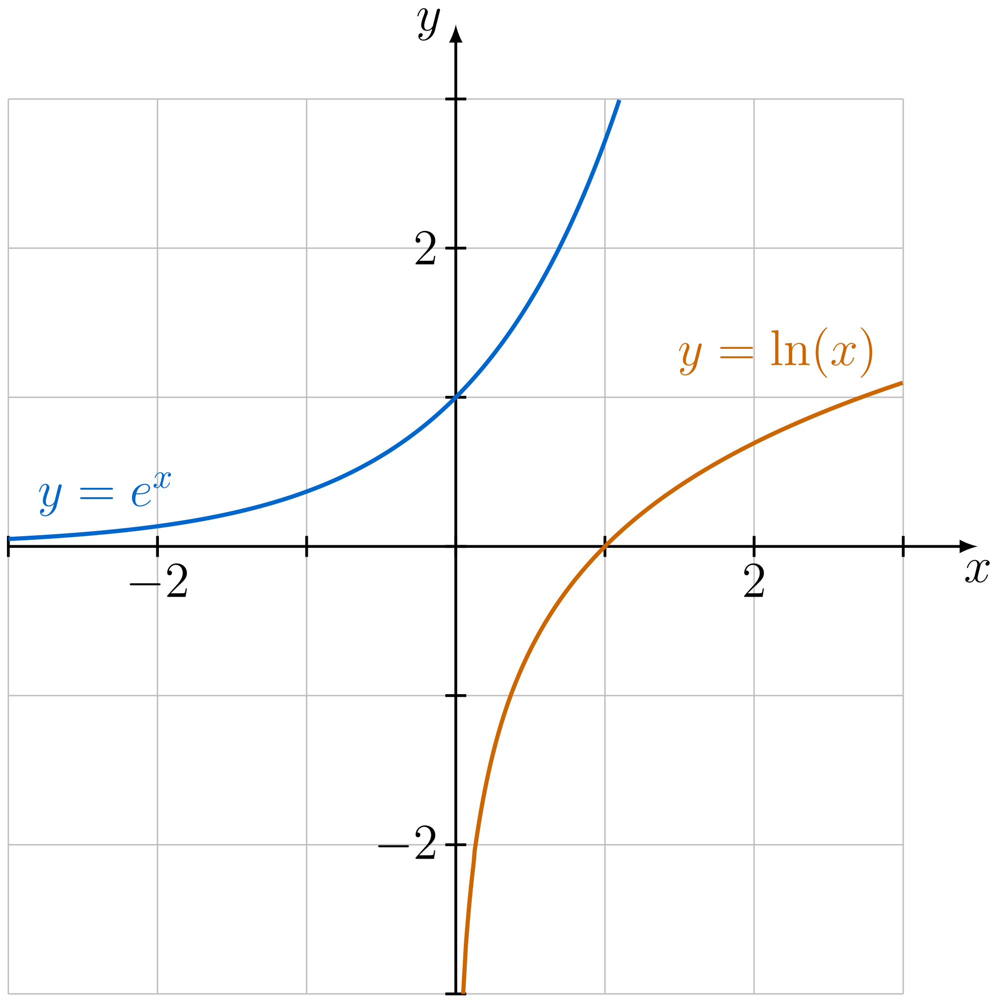
5.5 Logarithmusfunktionen – natürlicher Logarithmus

Definition 24

Die Umkehrfunktion $\phi : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ der natürlichen Exponentialfunktion heißt **natürlicher Logarithmus** *und die Funktionsvorschrift wird mit $x \mapsto \ln(x)$ bezeichnet. Es gilt: $e^{\ln(y)} = y$ für alle $y \in \mathbb{R}^+$ und $\ln(e^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.*

Definitionsbereich	$(0, \infty)$
Stetigkeit	stetig auf ganz $D = (0, \infty)$
Differenzierbarkeit	auf D beliebig oft differenzierbar
Ableitung	$f'(x) = 1/x$
Stammfunktion	$F(x) = x \ln(x) - x$
Monotonie	streng monoton wachsend
Bild	$\mathbb{R}$
Nullstellen	$x = 1$

5.5 Logarithmusfunktionen – Graphen von exp und ln



5.5 Logarithmusfunktionen

Ganz analog zu exp besitzt jede andere Exponentialfunktion eine Umkehrfunktion:

Definition 25

Für festes $a > 0$ (wobei $a \neq 1$) ist der **Logarithmus** $\log_a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ **zur Basis** a *definiert als Umkehrkehrfunktion der Exponentialfunktion $x \mapsto a^x$.*
Das heißt, $x = \log_a(y)$ ist die eindeutige Lösung der Gleichung $y = a^x$. Weil $a^1 = a$ und $a^0 = 1$ ist, folgt

$$\log_a a = 1 \qquad \textit{und} \qquad \log_a 1 = 0.$$

Bemerkung.

(i) Der Logarithmus zur Basis 10 heißt **Zehnerlogarithmus** und wird mit $\log_{10} = \lg$ bezeichnet.
(ii) Der Logarithmus zur Basis 2 heißt **Zweierlogarithmus** und wird mit $\log_2 = \mathrm{lb}$ bezeichnet.
(iii) Selbstverständlich ist wiederum $\log_e = \ln$ der natürliche Logarithmus zur Basis e.

5.5 Logarithmus – Gesetze

Logarithmen zu verschiedenen Basen lassen sich ineinander umrechnen:

Wegen $a > 0$, dann ist $a = e^{\ln(a)}$. Wegen des Potenzgesetzes gilt also $y := a^x = e^{x \ln(a)}$. Nehmen wir auf beiden Seiten dieser Gleichung den Logarithmus $\log_a$, dann erhalten wir $\ln(y) = x \ln(a)$.
Analog folgt aus $y = c^z$ die Gleichung $\ln(y) = z \cdot \ln(c)$. Andererseits ist aber $x = \log_a(y)$ und $z = \log_c(y)$, also für $a \neq 1$

$$\log_a(y) = x = \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = \frac{z \ln(c)}{\ln(a)} = \frac{\ln(c)}{\ln(a)} \log_c(y) = \frac{\log_c(y)}{\log_c(a)}.$$

Satz 13

Für zwei Basen $a, c > 0$ (mit $a \neq 1 \neq c$) und $y > 0$ gilt

$$\log_a y = \frac{\log_c y}{\log_c a}\,.$$

5.5 Logarithmus – Gesetze

Außerdem gelten die folgenden Rechenregeln:

Satz 14

Für jede Basis $a > 0$ ($a \neq 1$), jedes $x \in \mathbb{R}$ und alle $u, v > 0$ gilt

$$x \log_a(u) = \log_a(u^x) \,, \tag{2}$$

$$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v) \,. \tag{3}$$

Dies impliziert insbesondere

$$\log_a\left(\frac{1}{v}\right) = -\log_a(v) \,, \tag{4}$$

$$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v) \,. \tag{5}$$

5.5 Logarithmus – Gesetze

Beweis. (2) Weil $u = a^{\log_a(u)}$, gilt $u^x = a^{x\log_a(u)}$. Durch Anwenden von $\log_a$ auf beide Seiten dieser Gleichung folgt $\log_a(u^x) = x\log_a(u)$.
(3) Setze $x = \log_a(u)$ und $y = \log_a(v)$, d.h. $a^x = u$ und $a^y = v$. Daraus folgt

$$u \cdot v = a^x \cdot a^y = a^{x+y}.$$

Anwenden von $\log_a$ impliziert schließlich

$$\log_a(u \cdot v) = x + y = \log_a(u) + \log_a(v).$$

(4) ist (2) im Spezialfall $x = -1$.
(5) ist eine Kombination von (3) und (4):

$$\log_a(\frac{u}{v}) = \log_a\left(u \cdot \frac{1}{v}\right) \overset{(3)}{=} \log_a(u) + \log_a(1/v) \overset{(4)}{=} \log_a(u) - \log_a(v).$$

$\square$

Beispiel. Wir lösen die Gleichung $\ln((\frac{1}{2+x})^2) = 0$. Mit (1) und (3) ist dies äquivalent zu $-2\ln(2+x) = 0$, also zu $\ln(2+x) = 0$. Exponenzieren ergibt $2 + x = 1$. Die Gleichung hat also die Lösung $x = -1$.

5.6 Potenzfunktionen

Nun können wir auch Potenzfunktionen mit beliebigen Exponenten betrachten:

Definition 26

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^a$ heißt **Potenzfunktion**. *Der Definitionsbereich D hängt hierbei vom Exponenten a wie folgt ab:*

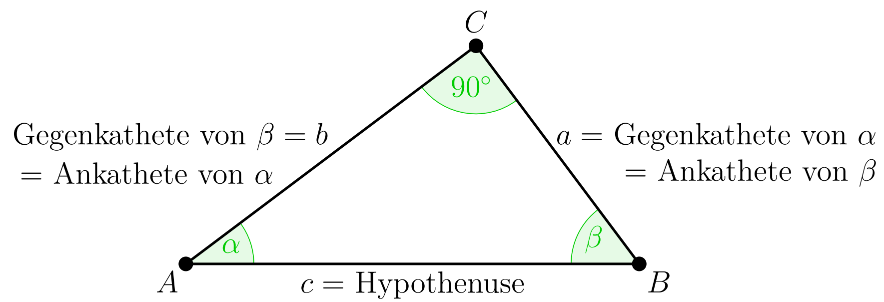
	$a > 0$	$a < 0$
$a \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$a \notin \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}_0^+$	$\mathbb{R}^+$

$$x^a := e^{a \ln(x)} \quad , a \notin \mathbb{Z},\ a < 0$$

$$x^a := \begin{cases} e^{a \ln(x)} & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \quad , a \notin \mathbb{Z}, a > 0$$

Stetigkeit	stetig im Definitionsbereich
Differenzierbarkeit	beliebig oft differenzierbar in D für $a \in \mathbb{Z}$, und in $\mathbb{R}^+$ für $a \notin \mathbb{Z}$
Ableitung	$f'(x) = ax^{a-1}$
Stammfunktion	$F(x) = \begin{cases} \frac{x^{a+1}}{a+1} & , a \neq -1 \\ \ln(x) & , a = -1 \end{cases}$
Nullstellen	für $a > 0$ in $x = 0$, für $a < 0$ keine

5.7 Trigonometrische Funktionen – im rechtwinklingen Dreieck



Definition 27

Wir definieren die trigonometrischen Funktionen im rechtwinkligen Dreieck

$$\cos\alpha = \frac{|Ankathete|}{|Hypothenuse|} = \frac{b}{c},$$
$$\sin\alpha = \frac{|Gegenkathete|}{|Hypothenuse|} = \frac{a}{c},$$
$$\tan\alpha = \frac{|Gegenkathete|}{|Ankathete|} = \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},$$
$$\cot\alpha = \frac{|Ankathete|}{|Gegenkathete|} = \frac{b}{a} = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Satz 15 (Satz des Pythagoras)

Im rechtwinkligen Dreieck gilt

$$a^2 + b^2 = c^2 \; .$$

Der Satz des Pythagoras übersetzt sich (indem man durch c^2 teilt) in

$$(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1 \; .$$

Beispiel. (i) Im gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck, also $\alpha = \beta = 45^\circ$, gilt $\cos(45^\circ) = \sin(45^\circ)$. Mit Pythagoras folgt $2\cos^2(45^\circ) = 1$, bzw.

$$\cos(45^\circ) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(ii) In einem gleichseitigen Dreieck sind alle Winkel gleich 60°. Zieht man eine Höhe ein, so gilt in den entstehenden rechtwinkligen Dreiecken $\cos(60^\circ) = \frac{1}{2} = \sin(60^\circ)$. Pythogoras liefert nun $\cos(30^\circ) = \sin(60^\circ) = \sqrt{1 - \cos^2(60^\circ)} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

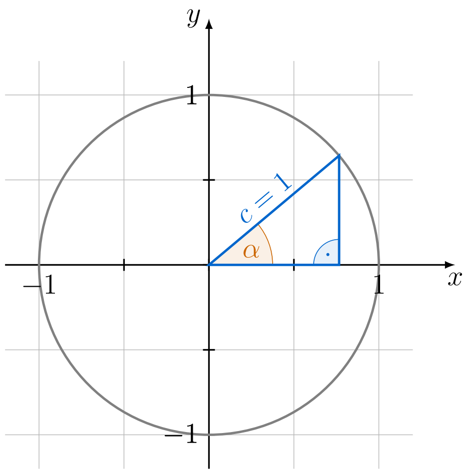
5.7 Trigonometrische Funktionen – Bogenmaß

Bogenmaß. Weil der Kreisumfang durch $2\pi r$ (r = Radius) beschrieben wird, entsprechen

$$360^\circ \mathrel{\widehat{=}} \text{Vollkreisbogen} \;=\; 2\pi.$$

Die Umrechnung eines Winkels vom Gradmaß α ins Bogenmaß x erfolgt also mittels der Gleichung

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{x}{2\pi}, \quad \text{oder äquivalent} \;\; x = 2\pi \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}.$$

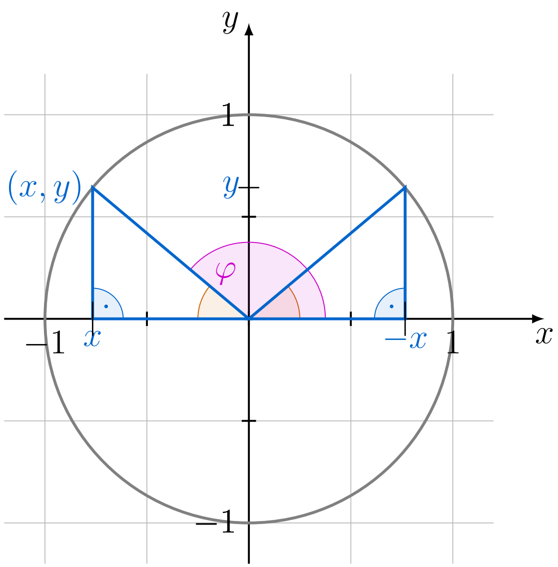


Es gilt:

$$90^\circ \mathrel{\widehat{=}} \frac{\pi}{2},$$
$$270^\circ \mathrel{\widehat{=}} \frac{3\pi}{2},$$
$$-90^\circ \mathrel{\widehat{=}} -\frac{\pi}{2},$$
$$720^\circ \mathrel{\widehat{=}} 4\pi.$$

Das Bogenmaß wird häufig auch mit φ (griechischer Buchstabe phi) bezeichnet.

5.7 Trigonometrische Funktionen – am Einheitskreis



Die rektangulären Koordinaten (x, y) eines Punktes auf der Einheitskreislinie erfüllen die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$.
Wir setzen $(x, y) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, wobei φ den Winkel bezeichnet, den der Fahrstrahl des Punktes mit der positiven x-Achse einschließt.
Dadurch werden cos und sin für **alle** Winkel $\varphi \in \mathbb{R}$ erklärt, indem sie auf Winkelfunktionen auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ zurückgeführt werden.

Offenbar ist der Winkel φ für einen Punkt (x, y) nur bis auf Vielfache von 2π bestimmt:

$$\cos(\varphi + 2\pi) = \cos(\varphi)\,, \quad \sin(\varphi + 2\pi) = \sin(\varphi)\,.$$

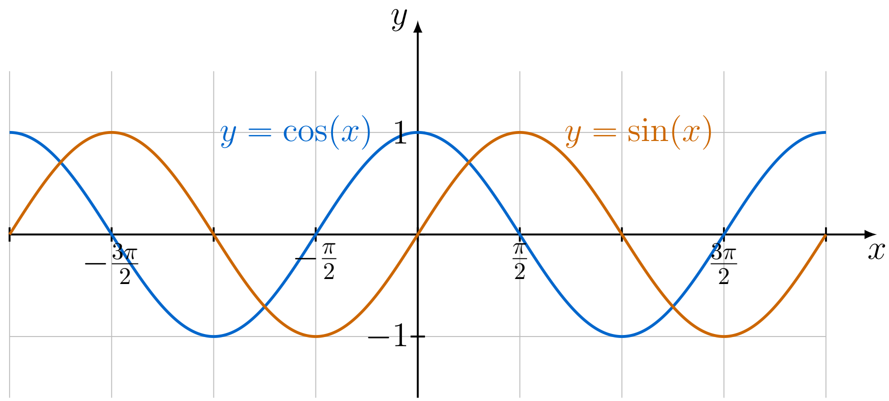
Die Funktionen $\cos, \sin$ sind 2π-periodisch.
Weil cos und sin die Identität $\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) = 1$ erfüllen, gilt für die Bilder der Funktionen $\cos(\mathbb{R}) = [-1, 1] = \sin(\mathbb{R})$.

5.7 Trigonometrische Funktionen – Eigenschaften Sinus und Kosinus

Aus den Symmetrieeigenschaften (Drehen und Spiegeln) am Einheitskreis erhält man zahlreiche Identitäten, z.B. gilt für alle $\varphi \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos(-\varphi) &= \cos(\varphi), \\ \sin(-\varphi) &= -\sin(\varphi), \\ \cos(\varphi) &= \sin(\varphi + \frac{\pi}{2}), \\ \sin(\varphi + \pi) &= -\sin(\varphi), \ \ldots \end{aligned}$$

Die Graphen der Funktionen $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehen so aus:



5.7 Trigonometrische Funktionen – Eigenschaften Sinus und Cosinus

	cos	sin
Definitionsbereich D	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Stetigkeit	überall	überall
Differenzierbarkeit	überall bel. oft	überall bel. oft
Ableitung	$-\sin$	$\cos$
Periodizität	2π	2π
Bild	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$
Nullstellen	$\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, wo $k \in \mathbb{Z}$	$k \cdot \pi$, wo $k \in \mathbb{Z}$
Symmetrie	gerade	ungerade
Monotonie	–	–

Hier findet sich eine Visualisierung des Übergangs von Funktionen am Einheitskreis zum Funktionsgraphen:
`https://hm4mint.nrw/hm1/link/HoeherMathem1/Teil1Grundl/5TrigonFunkti/TrigonFunkti`

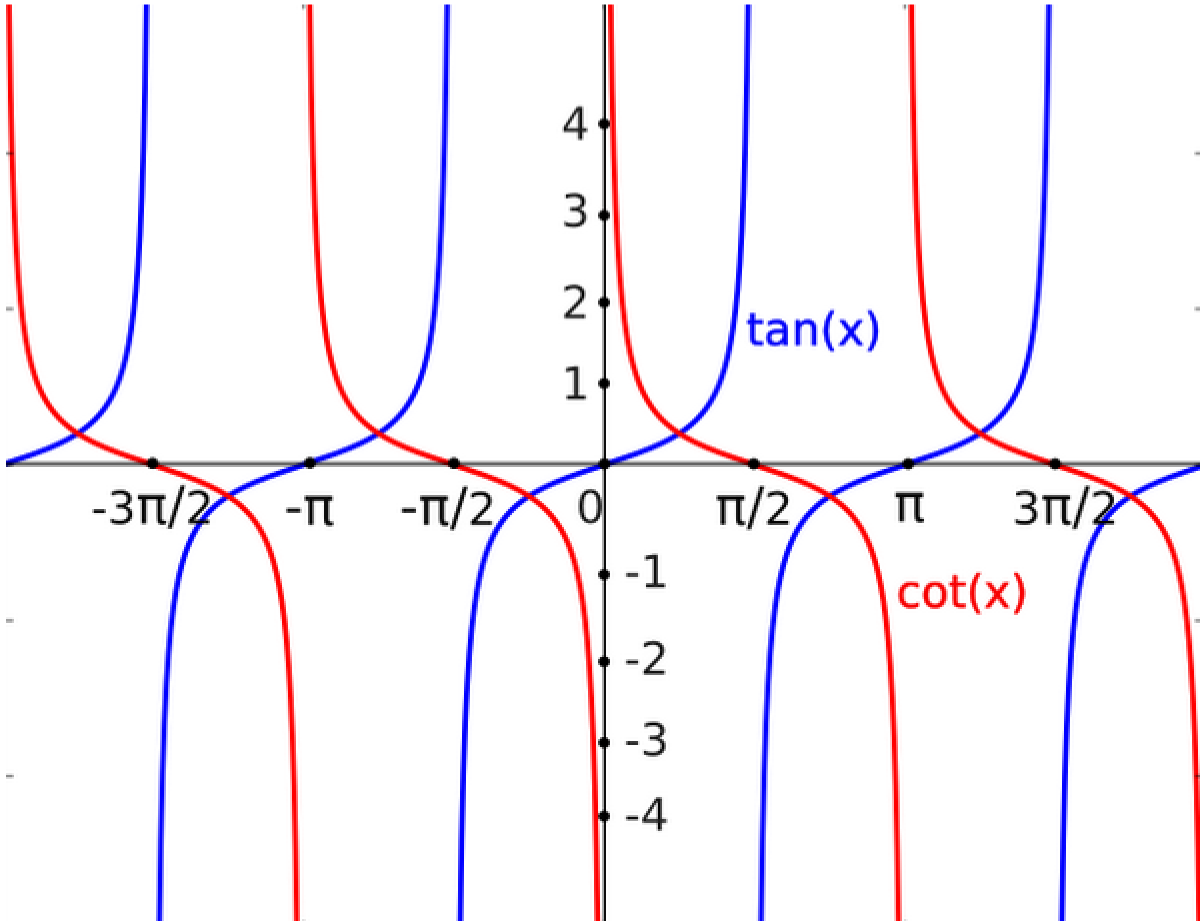
5.7 Trigonometrische Funktionen - Tangens und Cotangens

Die Funktionen $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ und $\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$ haben Lücken im Definitionsbereich entsprechend den Nullstellen von $\cos(x)$ und $\sin(x)$.

Eigenschaften von tan **und** cot

	tan	cot
Definitionsbereich D	$\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$
Stetigkeit	überall	überall
Differenzierbarkeit	überall bel. oft	überall bel. oft
Ableitung	$\frac{1}{\cos^2}$	$-\frac{1}{\sin^2}$
Stammfunktion	$-\ln \circ \cos$	$\ln \circ \sin$
Periodizität	π	π
Bild	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Nullstellen	$k \cdot \pi$, wo $k \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$, wo $k \in \mathbb{Z}$
Symmetrie	ungerade	ungerade
Monotonie	auf jedem Teilint. von D	auf jedem Teilint. von D

Graphen von tan und cot:



Satz 16

Die **Additionstheoreme** *der trigonometrischen Funktionen lauten: Für alle* $x, y \in \mathbb{R}$*, so dass beide Seiten der Gleichung definiert sind, gilt:*

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin(x) \cdot \cos(y) \pm \cos(x) \cdot \sin(y), \\ \cos(x \pm y) &= \cos(x) \cdot \cos(y) \mp \sin(x) \cdot \sin(y), \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \tan(x \pm y) &= \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x) \cdot \tan(y)}, \\ \cot(x \pm y) &= \frac{\cot(x) \cdot \cot(y) \mp 1}{\cot(x) \pm \cot(y)}. \end{aligned}$$

Die Additionstheoreme für sin und cos werden wir am Ende von Teil IV (Lineare Algebra) beweisen.

5.7 Trigonometrische Funktionen - Umkehrfunktionen

Die Funktionen $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$ und $\cot(x)$ sind nicht injektiv. Daher kann man Sie nur auf solchen Teilintervallen ihrer Definitionsbereiche umkehren, auf denen sie monoton sind (siehe Satz 1).
Für deren Wahl haben sich folgende Konventionen durchgesetzt:

1. Die **Arcussinus-Funktion** $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y \mapsto \arcsin(y)$, ist die Umkehrfunktion von $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$. Mit dem genannten Definitions- und Zielbereich ist $x \mapsto \sin(x)$ eine bijektive Abbildung.
2. Die **Arcuscosinus-Funktion** $\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$, $y \mapsto \arccos(y)$, ist die Umkehrfunktion von $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$. Mit dem genannten Definitions- und Zielbereich ist $x \mapsto \arccos(x)$ eine bijektive Abbildung.
3. Die **Arcustangens-Funktion** $\arctan : \mathbb{R} \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $y \mapsto \arctan(y)$, ist die Umkehrfunktion von $\tan : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$. Mit dem genannten Definitions- und Zielbereich ist $x \mapsto \arctan(x)$ eine bijektive Abbildung.
4. Die **Arcuscotangens-Funktion** $\operatorname{arccot} : \mathbb{R} \to [0, \pi]$, $y \mapsto \operatorname{arccot}(y)$, ist die Umkehrfunktion von $\cot : [0, \pi] \to \mathbb{R}$. Mit dem genannten Definitions- und Zielbereich ist $x \mapsto \operatorname{arccot}(x)$ eine bijektive Abbildung.

5.7 Trigonometrische Funktionen - Gleichungen lösen

Die Wahl eines passenden Bereichs für die Konstruktion der Umkehrfunktion der Winkelfunktionen hat einige Konsequenzen für die Lösung von Gleichungen. Wir betrachten dazu ein Beispiel.

Beispiel 26. Wir suchen alle Lösungen der Gleichung $\sin(x) = a \geq 0$.

1. Für $a > 1$ gibt es keine Lösungen, da in diesem Fall $a \notin \sin(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
2. Für $a = 1$ sind die Lösungen die Maxima der Sinusfunktion, d.h. die Punkte $x_k = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
3. Für $a = 0$ sind die Lösungen die Nullstellen der Sinusfunktion, d.h. die Punkte $x_k = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$.
4. Für $0 < a < 1$ wollen wir nun die Lösungen mit Hilfe der Umkehrfunktion ausdrücken. Sei $A = \arcsin(a)$, dann ist die Lösungsmenge der Gleichung

$$\mathbb{L} = \{A + 2k\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-A + (2k+1)\pi \,:\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

4.11 Elementare Funktionen - Gleichungen mit trigonometrischen Funktionen