Vorkurs Mathematik–
Teil III. Lineare Algebra

Inhalt

1.1 Lineare Gleichungssysteme – Motivation

Beispiel 1. Eine babylonische Kleinschrift von ca. 1700 v. Chr. lautet in etwa: Ich habe zwei Felder. Eines trägt auf 1 bur 4 gur Getreide, das andere auf 1 bur 3 gur Getreide. Zusammen sind die Felder 30 sar groß. Das erste trug $8\frac{1}{3}$ sila mehr als das zweite. Wie groß sind meine Felder? [1 bur = 30 sar, 1 gur = 5 sila.]

Ansatz: Für die zwei Flächen A und B der Felder gilt:

$$A + B = 30 \quad \wedge \quad \frac{4}{30}A - \frac{3}{30}B = \frac{1}{5}(8\frac{1}{3}).$$

Beispiel 2. Wo schneiden sich die Geraden $ax + by = e$ und $cx + dy = f$ in der (x, y)-Ebene?

$$ax + by = e \quad \wedge \quad cx + dy = f\,.$$

Beispiel 3.

1. Längs jedes geschlossenen Weges ist die Summe der Spannungen null.
2. An jedem Verzweigungspunkt ist die Summe der abfließenden Ströme (mit Vorzeichen!) gleich null.
3. [Ohmsches Gesetz: $U = R \cdot I$.]

Gegeben Kantenwiderstände r_i und Kantenstromstärken x_i mit $u_i = r_i \cdot x_i$:

$$\begin{aligned} r_1x_1 + r_5x_5 - r_2x_2 &= 0, \\ r_5x_5 + r_4x_4 - r_3x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 &= I, \\ x_3 + x_4 &= I, \\ x_3 + x_5 &= x_1, \\ x_2 + x_5 &= x_4. \end{aligned}$$

Beispiel 4. Schon bei der Modellierung eines Autokotflügels treten lineare Gleichungssysteme mit 10^6 bis 10^9 Gleichungen und Unbestimmten auf.

Fazit: Man sollte lineare Gleichungssystem systematisch lösen.

1.2 Lineare Gleichungssysteme – Definition

Definition 1

Gegeben seien (reelle) Zahlen a_{ij} und b_i und Variable $x_1, \ldots, x_n$. Wenn diese gleichzeitig

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

erfüllen, so spricht man von einem linearen Gleichungssystem (LGS) mit m Gleichungen und n Unbekannten (Unbestimmten).

Die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ besteht aus allen n-Tupeln $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, die das LGS erfüllen, die also alle m Gleichungen gleichzeitig erfüllen.

1.2 Lineare Gleichungssysteme – Anzahl der Lösungen

Beispiel 5.
$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 2 \\ 2x + 3y &= 7 \end{aligned} \qquad \text{mit} \quad \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$
Dieses LGS hat genau eine Lösung.

Beispiel 6.
$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 2 \\ -6x + 8y &= -4 \end{aligned} \qquad \text{mit} \quad \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{4}{3}y + \frac{2}{3} \\ y \end{pmatrix} : y \in \mathbb{R} \right\}.$$
Dieses LGS hat unendlich viele Lösungen.

Beispiel 7.
$$\begin{aligned} 3x - 4y &= 0 \\ 3x - 4y &= 3 \end{aligned} \qquad \text{mit} \quad \mathbb{L} = \emptyset.$$
Dieses LGS hat gar keine Lösung.

Bemerkung. (i) Ein LGS hat genau eine, unendlich viele oder gar keine Lösung.
(ii) Ein LGS mit rechter Seite Null, also $b_i = 0$ für $i = 1, \dots, m$, heißt **homogen**. Ist mindestens eines der b_i ungleich Null, so heißt es **inhomogen**.

1.3 Lineare Gleichungssysteme – Lösungsstrategie

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 7 \\ x_2 - x_3 &= 0 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem können wir sofort lösen, indem wir von unten nach oben (rückwärts) einsetzen. **Strategie:** Wir bringen unser LGS durch Äquivalenzumformungen auf so eine Stufenform.

Folgende **elementare Zeilenumformungen** sind beim Umformen erlaubt:

- Multiplizieren einer Zeile mit einer Zahl $\neq 0$.
- Vertauschen von Zeilen.
- Vielfaches einer Zeile zu einer anderen addieren (oder subtrahieren).

Satz 1

Die elementaren Zeilenumformungen sind Äquivalenzumformungen. Ein durch sie aus dem ursprünglichen Gleichungssystem hervorgegangenes hat dieselbe Lösungsmenge wie dieses.

Der **Gauß-Algorithmus** bringt mit Hilfe dieser elementaren Zeilenumformungen ein LGS auf **Zeilenstufenform**:

$$
\left(\begin{array}{cccccccccccc|c}
(*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & =(*) \\
0 & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & =(*) \\
0 & 0 & 0 & (*) & (*) & (*) & (*) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & =(*) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (*) & (*) & \dots & \dots & \dots & \dots & =(*) \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & (*) & (*) & \dots & =(*) \\
0 & 0 & 0 & & \vdots & & & & \vdots & & 0 & 0 & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & =(*) \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & = \ 0 \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & = \ 0
\end{array}\right)
$$

Dabei haben alle Stufen (bis auf ggf. die letzte) die Höhe 1.

Die auszuführenden Manipulationen werden meist rechts vom LGS vermerkt.

Beispiel 8.

$$\left[\begin{array}{rrrrrr} 2x_1 & +4x_2 & & +4x_4 & = & 8 \\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & +4x_4 & = & 10 \\ -2x_1 & -2x_2 & +x_3 & +\ x_4 & = & 0 \\ & -x_2 & & +\ x_4 & = & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \mid : 2 = \mathrm{I}' \\ \mid -\mathrm{I}' \\ \mid +\mathrm{I} \\ \end{array} \iff \left[\begin{array}{rrrrrr} 1x_1 & +2x_2 & & +2x_4 & = & 4 \\ & x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 6 \\ & 2x_2 & +x_3 & +5x_4 & = & 8 \\ & -x_2 & & +\ x_4 & = & -1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \mid -2\cdot\mathrm{II} \\ \mid +\mathrm{II} \end{array}$$

$$\iff \left[\begin{array}{rrrrrr} x_1 & +2x_2 & & +2x_4 & = & 4 \\ & x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 6 \\ & & -x_3 & +x_4 & = & -4 \\ & & x_3 & +3x_4 & = & 5 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \mid +\mathrm{IV} \\ \mid = \mathrm{III}' \end{array} \iff \left[\begin{array}{rrrrrr} x_1 & +2x_2 & & +2x_4 & = & 4 \\ & x_2 & +x_3 & +2x_4 & = & 6 \\ & & x_3 & +3x_4 & = & 5 \\ & & & 4x_4 & = & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \mid -2\cdot\mathrm{II}' - 2\cdot\mathrm{IV}' \\ \mid -\mathrm{III} + \mathrm{IV} = \mathrm{II}' \\ \mid -3\cdot\mathrm{IV}' \\ \mid : 4 = \mathrm{IV}' \end{array}$$

$$\iff \left[\begin{array}{rrrrrr} x_1 & & & & = & 1 \\ & x_2 & & & = & 5/4 \\ & & x_3 & & = & 17/4 \\ & & & x_4 & = & 1/4 \end{array}\right], \quad \text{also: } \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 5/4 \\ 17/4 \\ 1/4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Man kann also in der Zeilenstufenform noch möglichst viele der Einträge oberhalb der Diagonalen beseitigen und die von Null verschiedenen Diagonaleinträge normieren.

1.3 Lineare Gleichungssysteme – Begleitmatrix

Schreibarbeit spart man, indem man den Gauß-Algorithmus nur auf die Koeffizienten a_{ij} und b_i anwendet. Das so entstehende Zahlenschema heißt **Begleitmatrix**.
Beispiel 9.

$$\left.\begin{array}{rrrrrr} x_1 & +2x_2 & - \ x_3 & + \ x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & +6x_2 & -3x_3 & +4x_4 & = & 5 \\ x_1 & +4x_2 & +3x_3 & + \ x_4 & = & 3 \\ -x_1 & - \ x_2 & +3x_3 & +2x_4 & = & 6 \end{array}\right] \iff \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right)$$

$$\iff \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & -5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$\text{also:} \quad \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Satz 2

Durch elementare Zeilenumformungen lässt sich jede Begleitmatrix in **Zeilenstufenform** *bringen,*

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc|c}
a_{11} & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (*) \\
0 & a_{22} & (*) & (*) & (*) & (*) & (*) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (*) \\
0 & 0 & 0 & a_{34} & (*) & (*) & (*) & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & (*) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{47} & (*) & \dots & \dots & \dots & \dots & (*) \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{rl} & (*) & \dots & (*) \\
0 & 0 & 0 & & \vdots & & & & \vdots & & 0 & 0 & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & b_s \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

mit Zahlen $a_{1i_1}, \dots, a_{ri_r} \neq 0$ *und* $b_s \neq 0$. *(Dabei ist auch* $s < r$ *möglich.)*

Daraus folgt, dass ein Gleichungssystem nicht lösbar ist, wenn in der Zeilenstufenform der Matrix der letzte Eintrag $b_s \neq 0$ in der letzten Spalte, der ungleich Null ist, in einer Zeile unterhalb der letzten Zeile der Koeffizientenmatrix liegt, die Elemente ungleich Null enthält (d.h. wenn $s > r$ ist).

Im Fall $s \leq r$ kann man aber die Begleitmatrix **immer** anschließend auf die folgende Form bringen:

$$\left(\begin{array}{cccccccccccc|c}
1 & 0 & (*) & 0 & (*) & (*) & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & (*) \\
0 & 1 & (*) & 0 & (*) & (*) & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & (*) \\
0 & 0 & 0 & 1 & (*) & (*) & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & (*) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (*) & \dots & 0 & \dots & \dots & (*) \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & (*) & \dots & (*) \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

1.4 Lineare Gleichungssysteme – Beispiel mit Parameter

Beispiel 10. Gibt es einen Wert a so, dass die Geraden g und h durch die Punkte $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ bzw. $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $S = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$ nicht windschief sind?

Geraden in Parameterform:

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}, \quad h = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ a-3 \end{pmatrix} : \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für Schnitt setze $g = h$:

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ a-3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ \lambda + 3\mu \\ \lambda + (3-a)\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

LGS in Unbestimmten λ und μ mit Begleitmatrix $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & (3-a) & 3 \end{array}\right)$.

1.4 Lineare Gleichungssysteme – Beispiel mit Parameter

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & (3-a) & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mid -\mathrm{I} \\ \mid -\mathrm{I} \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & (2-a) & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mid :2 \end{array} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & (1-a/2) & 1 \end{array}\right)$$

Damit dieses LGS eine Lösung hat, muss $2 = 1 - a/2$ erfüllt sein, also $a = -2$. Dann (und nur dann) ist das LGS äquivalent zu (mit Umformungen III-II und II:2)

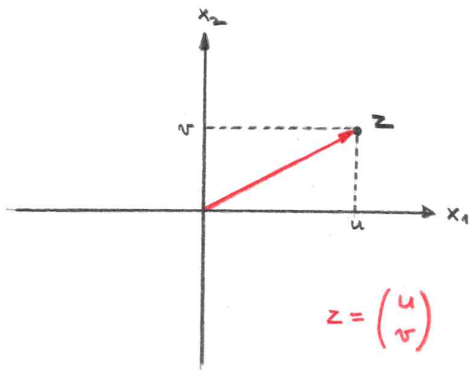
$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{rcr} \lambda + \mu & = & 1 \\ \mu & = & 1/2 \\ 0 & = & 0 \end{array}\right].$$

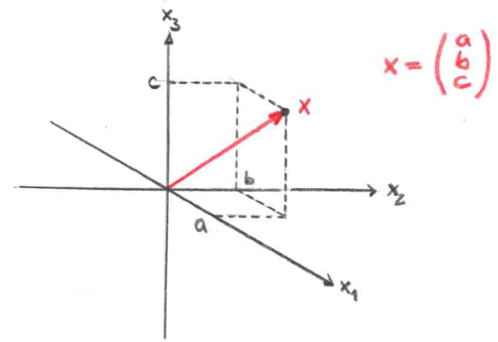
Antwort: Die Geraden sind genau dann nicht windschief, wenn $a = -2$. In diesem Fall haben sie genau einen Schnittpunkt, in dem $(\lambda, \mu) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gilt.

Der Schnittpunkt S ist (setze z.B. $\lambda = \frac{1}{2}$ in g ein) $S = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

2.1 Ebene und Raum

Jeder Punkt der Ebene ist durch zwei reelle Koordinaten festgelegt, jeder Punkt des Raumes durch drei reelle Koordinaten. Da die Reihenfolge der Koordinaten eine Rolle spielt, kann man einen Punkt in der Ebene durch ein 2-Tupel $z \in \mathbb{R}^2$ und einen Punkt im Raum durch ein 3-Tupel $x \in \mathbb{R}^3$ eindeutig beschreiben.





Elemente aus $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$, die Punkte in der Ebene bzw. Raum bezeichnen, nennen wir **Ortsvektoren**. Differenzen von Ortsvektoren heißen auch **Richtungsvektoren**. Die Einträge in den 2- bzw. 3-Tupeln heißen die **Koordinaten** des Vektors. Konventionsgemäß schreiben wir die Vektoren, indem wir die Koordinaten untereinander in einer Spalte anordnen.

2.1 Koordinaten im n-dimensionale Raum

Für die Beschreibung von Punkten als Tupel von Zahlen ist es nicht wesentlich, dass die Dimension des Raumes 2 oder drei ist.

Definition 2

Wir schreiben den Raum der geordneten n-Tupel mit Einträgen im Körper $\mathbb{R}$ als

$$\mathbb{R}^n := \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \; : \; x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

Der Grund, warum man $\mathbb{R}^n$ einen **Vektorraum** und seine Elemente **Vektoren** nennt, ist aber, dass man auf $\mathbb{R}^n$ zwei Rechenoperationen ausführen kann, die bestimmten Regeln unterworfen sind.

2.1 Addition und Skalarmultiplikation von Koordinatenvektoren

Definition 3

Die **Summe** *zweier Vektoren*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

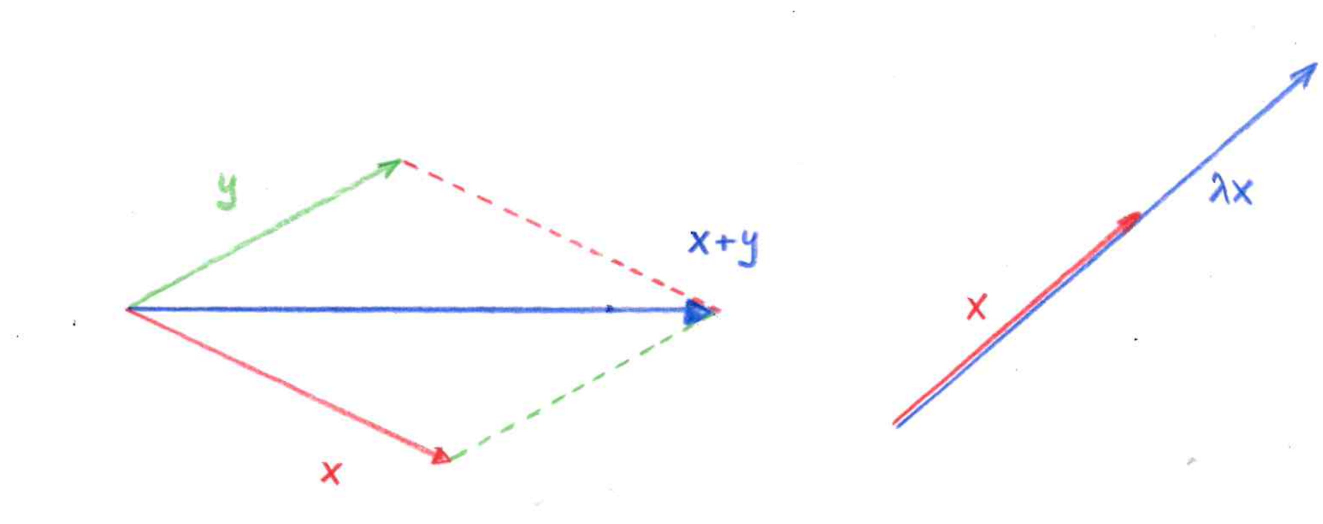
ist gegeben durch das geordnete n-Tupel

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Die **Skalarmultiplikation** *eines Vektors* $x \in \mathbb{R}^n$ *mit einer* Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ *ist gegeben durch*

$$\lambda x = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

2.1 Addition und Skalarmultiplikation von Koordinatenvektoren



Addition und Skalarmultiplikation für Elemente aus $\mathbb{R}^n$

Indem man die Eigenschaften dieser beiden Verknüpfungen auf $\mathbb{R}^n$ zur Basis einer abstrakten Definition macht, wird man auf den Begriff des Vektorraums geführt. Neben den Räumen $\mathbb{R}^n$ gibt es noch viele weitere Beispiele von Vektorräumen.

2.2 Das Konzept des Vektorraums über einem Körper

Definition 4

Eine Menge V heißt Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$, wenn es zwei Abbildungen

$$+ : V \times V \to V, (x, y) \mapsto x + y \quad (\textit{Vektoraddition})$$
$$\cdot : \mathbb{K} \times V \to V, (\lambda, x) \mapsto \lambda \cdot x \quad (\textit{Skalarmultiplikation})$$

gibt mit den folgenden Eigenschaften:

1. *Die Vektoraddition ist assoziativ, d.h.* $x + (y + z) = (x + y) + z$ *für alle* $x, y, z \in V$.
2. *Die Vektoraddition ist kommutativ, d.h.* $x + y = y + x$ *für alle* $x, y \in V$.
3. *Es gibt einen Vektor* $o \in V$*, den Nullvektor, so dass* $o + x = x$ *für alle* $x \in V$.
4. *Zu jedem* $x \in V$ *gibt es ein Element* $-x \in V$ *mit* $x + (-x) = o$.
5. *Für das Einselement* $1 \in \mathbb{K}$ *gilt* $1 \cdot x = x$ *für alle* $x \in V$.
6. *Für alle* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $x \in V$ *gilt* $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$.
7. *Für alle* $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $x \in V$ *gilt* $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.
8. *Für alle* $\lambda \in \mathbb{K}$, $x, y \in V$ *gilt* $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$.

Beispiel 11. Der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$.

Seien

$$\begin{aligned} P(X) &= a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0, \\ Q(X) &= b_n X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \ldots + b_1 X + b_0 \end{aligned}$$

mit $a_0, \ldots, a_n, b_n, \ldots, b_0 \in \mathbb{C}$ Polynome vom Grad kleiner oder gleich n mit komplexen Koeffizienten. Dann sind auch

$$(P+Q)(X) := (a_n + b_n) X^n + (a_{n-1} + b_{n-1}) X^{n-1} + \ldots + (a_1 + b_1) X + (a_0 + b_0),$$

sowie

$$(\lambda P)(X) := (\lambda a_n) X^n + (\lambda a_{n-1}) X^{n-1} + \ldots + (\lambda a_1) X + (\lambda a_0)$$

für ein beliebiges $\lambda \in \mathbb{C}$ Polynome vom Grad kleiner oder gleich n mit komplexen Koeffizienten. Die Polynome vom Grad $\leq n$ mit komplexen Koeffizienten bilden also einen Vektorraum über $\mathbb{C}$.

2.2 Beispiele von Vektorräumen

Beispiel 12. Der Vektorraum der stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Seien

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Aus dem Analysis-Teil wissen wir, dass die Summe $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$x \mapsto (f + g)(x) := f(x) + g(x)$$

und für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$ die Funktion $\lambda f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$(\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

ebenfalls stetige Funktionen sind. Anders ausgedrückt: Die stetigen reellen Funktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{R}$ bilden einen reellen Vektorraum.

2.2 Keine Beispiele von Vektorräumen

Beispiel 13. Die Menge der *normierten* Polynome vom Grad $\leq n$ bildet keinen Vektorraum.

Die Menge der normierten Polynome $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$ vom Grad n mit Addition und Skalarmultiplikation wie in Beispiel 11 ist kein $\mathbb{C}$-Vektorraum, da weder die Summe zweier normierter Polynome vom Grad n noch die Multiplikation mit $1 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ wieder ein normiertes Polynom ergibt:
Zum Beispiel sind $Q_1(X) = X^n$ und $Q_2(X) = X^n + 1$ beide normiert, aber $(Q_1 + Q_2)(X) = 2X^n + 1$ ist es ebenso wenig wie $5 \cdot Q_1(X) = 5X^n$.

Beispiel 14. Die Vereinigung der Koordinatenachsen in $\mathbb{R}^2$ ist kein Vektorraum.

Die Vereinigung $W := \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, x) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ mit Addition und Skalarmultiplikation wie in Definition 3 ist nicht abgeschlossen bzgl. „$+$“, da zum Beispiel

$$(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin W.$$

Definition 5

Sei V mit der Addition $+$ und der Skalarmultiplikation $\cdot$ ein Vektorraum über $\mathbb{K}$.

Eine Teilmenge $\emptyset \neq W \subset V$ heißt **Untervektorraum** *von V, wenn W bezüglich $+$ und $\cdot$ abgeschlossen ist, d.h. aus $u, v \in W$ folgt auch $u + v \in W$, sowie $\lambda \cdot w \in W$ für alle $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Beispiel 15. (a) Die periodischen stetigen Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit Periode $a > 0$, d.h. es gilt $f(x + a) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, bilden einen Untervektorraum des Raumes der stetigen Funktionen aus Beispiel 12. (b) Seien G_1, G_2 die Geraden

$$G_1 := \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3, \; G_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

$G_1 \subset \mathbb{R}^3$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$, G_2 **nicht**. (c) Jeder Vektorraum V ist auch Untervektorraum von sich selbst. (d) W aus Beispiel 14 ist wie gesehen **kein** Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

2.3 Untervektorräume und Erzeugendensysteme

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$. Sind $v_1, \dots, v_n \in V$ Vektoren, so nennt man einen Ausdruck der Form

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in V$$

mit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ eine **Linearkombination** der Vektoren $v_1, \dots, v_n$.

Lemma 3

Sind $v_1, \dots, v_n \in V$ Vektoren des $\mathbb{K}$-Vektorraums V. Dann ist die Menge aller Linearkombinationen

$$\langle v_1, \dots, v_n \rangle_{\mathbb{K}} := \{ w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \,:\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \} \subset V$$

ein Untervektorraum von V. Man nennt ihn auch das **lineare Erzeugnis** *von $v_1, \dots, v_n$ oder den* **linearen Spann** *der Vektoren $v_1, \dots, v_n$.*
Eine weitere gebräuchliche Bezeichnung ist daher $\mathrm{span}(v_1, \dots, v_n)$.

Beweis. Seien $a = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n, b = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle_{\mathbb{K}}$.
Dann ist mit Assoziativ- und Kommutativgesetz

$$\begin{aligned} a + b &= (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) + (\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n) \\ &= \lambda_1 v_1 + \mu_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n + \mu_n v_n, \end{aligned}$$

und mit dem Distributivgesetz folgt wegen $\lambda_i + \mu_i \in \mathbb{K}$

$$a + b = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) v_n \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle_{\mathbb{K}}.$$

Genauso folgt

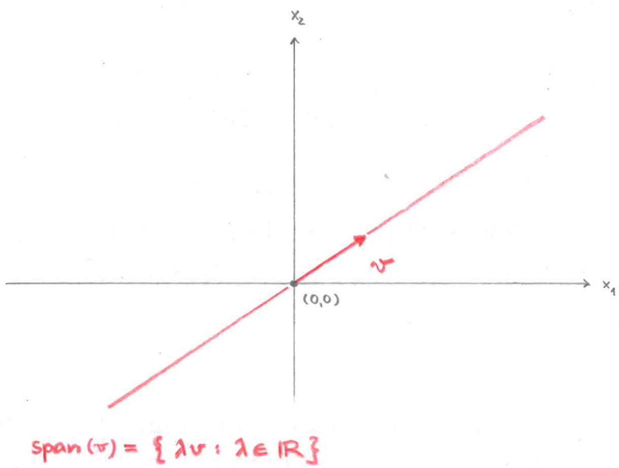
$$\mu a = \mu(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = (\mu\lambda_1) v_1 + \ldots + (\mu\lambda_n) v_n \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle_{\mathbb{K}}.$$

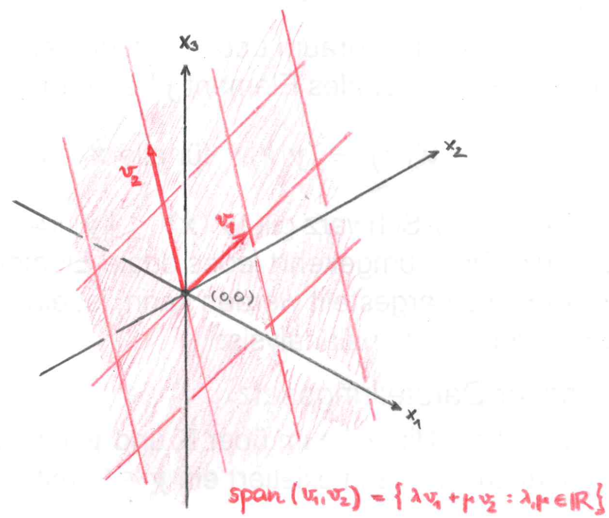
□

2.3 Untervektorräume und Erzeugendensysteme

Bislang haben wir (absichtlich) hauptsächlich Beispiele von Vektorräumen betrachtet, die nicht mit denen übereinstimmen, die Sie schon kennen sollten. Jetzt aber:

Beispiel 16. (1) Identifizieren wir die Ebene mit dem Koordinatenraum $\mathbb{R}^2$, so sind Geraden durch den Nullpunkt des Koordinatensystems Untervektorräume von $\mathbb{R}^2$. (2) Identifizieren wir den dreidimensionalen Raum mit dem Koordinatenraum $\mathbb{R}^3$, so sind Geraden und Ebenen durch den Nullpunkt des Koordinatensystems Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$.





2.3 Untervektorräume und Erzeugendensysteme

Definition 6

Eine (endliche) Menge von Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ aus einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V heißt **Erzeugendensystem** *von V, falls $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle_{\mathbb{K}} = V$. Gibt es ein endliches Erzeugendensystem, so nennen wir den Vektorraum V* **endlich erzeugt**.

Beispiel 17. (1) Die Einheitsvektoren

$$e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, e_{n-1} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bilden ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^n$. Die e_i werden die **Standarderzeuger** genannt.

(2) Der Vektorraum der stetigen Funktionen aus Beispiel 12 ist **nicht** endlich erzeugt.

2.4 Lineare Unabhängigkeit und Basen

Definition 7

Eine (endliche) Menge von Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ aus einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V heißt **linear unabhängig**, *falls es nur eine einzige Linearkombination der $v_1, \ldots, v_n$ gibt mit*

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = o.$$

Notwendigerweise ist dies dann die Linearkombination mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Definition 8

Ist $v_1, \ldots, v_n \in V$ ein Erzeugendensystem von V, das aus linear unabhängigen Vektoren besteht, so nennt man $v_1, \ldots, v_n$ eine **Basis** *von V.*

Beispiel 18. (1) Die Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n$ bilden eine Basis von $\mathbb{R}^n$. Diese wird auch die **Standardbasis** genannt.
(2) Die Monome $p_0(X) = 1, p_1(X) = X, p_2(X) = X^2, \ldots, p_n(X) = X^n$ bilden eine Basis des Vektorraumes der Polynome vom Grad $\leq n$.

2.4 Lineare Unabhängigkeit und Basen

Lemma 4

(1) Ist $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V, so lässt sich jeder Vektor $w \in V$ als Linearkombination der $v_1, .., v_n$ darstellen.
(2) Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, so lässt sich jeder Vektor $w \in V$ auf genau eine Weise als Linearkombination der $v_1, .., v_n$ darstellen.

Beweis. (1) folgt aus der Definition des Erzeugendensystems. (2) Angenommen, $w \in V$ ist ein Vektor mit zwei Darstellungen

$$w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n$$

als Linearkombinationen der $v_1, \ldots, v_n$. Dann gilt

$$(\lambda_1 - \mu_1)v_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)v_n = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n - (\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n) = w - w = o,$$

und da die $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, folgt $\lambda_i - \mu_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Damit sind die zwei angenommenen Darstellungen von w als Linearkombination der $v_1, \ldots, v_n$ zwingend dieselben. $\square$

2.4 Lineare Unabhängigkeit und Basen

Beispiel 19. (1) Sind $v_1, v_2 \in V$ linear abhängig, so gibt es eine Linearkombination $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = o$, wobei **nicht beide** Zahlen λ_1, λ_2 gleich Null sind. Ohne Einschränkung sei $\lambda_1 \neq 0$. Dann ist $v_1 = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v_2$, also $v_1 \in \langle v_2 \rangle_{\mathbb{K}}$.

(2) Sind $v_1, .., v_m \in V$ paarweise verschiedene, aber ansonsten beliebige Vektoren, so sind die Vektoren $o, v_1, ..., v_m$ immer linear abhängig, da

$$\lambda o + 0 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_m = o$$

ist für jedes $\lambda \in \mathbb{R}$. Insbesondere ist der Nullvektor o linear abhängig von sich selbst.

(3) Aus (1) folgt, dass man immer einen der linear abhängigen Vektoren als Linearkombination der anderen ausdrücken kann. Aus (2) folgt, dass man im Allgemeinen höchstens einen der linear abhängigen Vektoren als Linearkombination der anderen ausdrücken kann. Sind nämlich die $v_1, ..., v_m$ in (2) linear unabhängig, so ist $o = 0 \cdot v_1 + ... + 0 \cdot v_m$ die einzige derartige Linearkombination.

2.5 Die Dimension endlich erzeugter Vektorräume

Der folgende Satz ist die Grundlage für den fundamentalen Begriff der Dimension eines Vektorraumes. Wir geben ihn ohne Beweis an.

Satz 1

Für endlich erzeugte Vektorräume gilt: Ist $v_1, \dots, v_n \in V$ eine Basis von V, und $w_1, \dots, w_m \in V$ Vektoren, wobei $m > n$. Dann sind die Vektoren $w_1, \dots, w_m$ linear abhängig in V.

Die entscheidende Folgerung ziehen wir aber mit Beweis.

Satz 2

Je zwei Basen eines endlich erzeugten Vektorraums bestehen aus gleich vielen Vektoren.

Beweis. Seien $a_1, \dots, a_n \in V$ und $b_1, \dots, b_m \in V$ zwei Basen von V. Wäre $n > m$, so wären die $a_1, \dots, a_n$ nach Satz 1 linear abhängig, in Widerspruch zu der Voraussetzung, dass $a_1, \dots, a_n$ eine Basis ist. Also ist $n \leq m$. Umgekehrt folgt analog $m \leq n$. Also ist $n = m$. $\square$

2.5 Die Dimension endlich erzeugter Vektorräume

Nach Satz 2 gibt es somit eine natürliche Zahl, die charakteristisch für einen gegebenen (endlich erzeugten) Vektorraum V ist, nämlich die Anzahl der Vektoren in einer beliebigen Basis von V.

Definition 9

Die **Dimension** $\dim V$ *eines endlich erzeugten Vektorraums V ist die eindeutig bestimmte Anzahl von Vektoren einer Basis von V.*
Der Vektorraum $V = \{o\}$, der nur aus dem Nullvektor besteht, hat keine Basis. Also ist seine Dimension definitionsgemäß $\dim V = 0$.

Beispiel 20. (1) Wie in Beispiel 18 (1) gesehen, ist somit $\dim \mathbb{R}^n = n$. Dies erklärt die Wahl des Namens 'Dimension' für diese Zahl. (2) Die Dimension des Vektorraums der Polynome vom Grad kleiner oder gleich n ist nach Beispiel 18 (2) gleich $n + 1$.

3.1 Matrizen

Definition 10

Eine **Matrix [pl. Matrizen]** *A ist ein rechteckiges Zahlenschema*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1\,n-1} & a_{1\,n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2\,n-1} & a_{2\,n} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{m-1\,1} & a_{m-1\,2} & a_{m-1\,3} & \dots & a_{m-1\,n-1} & a_{m-1\,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{m\,n-1} & a_{m\,n} \end{pmatrix}.$$

Hat es m **Zeilen** *und n* **Spalten**, *so spricht man von einer $(m \times n)$-Matrix. Die Einträge $a_{ij} \in \mathbb{K}$ können dabei aus verschiedenen Zahlenbereichen sein, z.B. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{C}$. Beim Doppelindex ij bezieht sich der erste auf die Zeilen Nummer i, der zweite auf die Spaltennummer j. [„Zeilen zuerst, Spalten später.“]*
Die Menge der $(m \times n)$-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{K}$ wird mit $M_{m,n}(\mathbb{K})$ oder auch $\mathbb{K}^{m\times n}$ bezeichnet. Für das obige Zahlenschema schreiben wir kurz

$$A = (a_{ij}) = (a_{ij})_{i=1,\dots,m, j=1,\dots,n} \in M_{m,n}(\mathbb{K}).$$

3.1 Matrizen – Beispiele und Addition

Beispiel 21. (1) Eine $(n \times 1)$-Matrix ist ein **Spaltenvektor** $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$. Oft identifizieren wir deshalb $\mathbb{R}^n$ mit $M_{n,1}(\mathbb{R})$.
(2) Eine $(1 \times n)$-Matrix ist ein **Zeilenvektor** $\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$.
(3) Eine $(n \times n)$-Matrix wird auch **quadratische** Matrix genannt.
(4) Insbesondere ist eine (1×1)-Matrix einfach eine Zahl $(a_{11}) \mathrel{\hat{=}} a_{11}$.

Wie für Vektoren, liegt auch für Matrizen **komponentenweise** Addition und Skalarmultiplikation nahe:
Für zwei Matrizen $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ derselben Zeilen- und Spaltenzahl setzt man deren Summe als

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{m\,n} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{m\,n} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1\,n} + b_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{m\,n} + b_{m\,n} \end{pmatrix}.$$

Das Produkt eines Skalars $\lambda \in \mathbb{K}$ und einer Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ ist

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{m\,n} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{m\,n} \end{pmatrix}.$$

Wie für Vektoren auch ergibt sich damit unmittelbar:

Satz 5

Es sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Dann bildet die Menge $M_{m,n}(\mathbb{K})$ der $(m \times n)$-Matrizen ist mit der Addition $+$ und der Skalarmultiplikation $\cdot$ einen $\mathbb{K}$-Vektorraum.

3.2 Weitere Arten der Multiplikation – Zeilen mit Spalten

Für Matrizen passender, aber verschiedener(!) Abmessung gibt es weitere sinnvolle Möglichkeiten der Multiplikation:

Definition 11

Das **Produkt eines Zeilenvektors** $v \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ **mit einem Spaltenvektor** $w \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ *derselben Länge ist eine Zahl aus* $\mathbb{K}$, *definiert als*

$$v \cdot w = (v_1, \ldots, v_n) \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} := v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n = \sum_{j=1}^{n} v_j w_j \in \mathbb{K}.$$

Beispiel 22. (1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 11.$

(2) Für den j-ten Einheitsvektor $e_j \in \mathbb{K}^n$ gilt: $\begin{pmatrix} a_1 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \cdot e_j = a_j$.

(3) Die Zeilen-Spalten-Multiplikation entspricht dem euklidischen Skalarprodukt, wenn man v ebenfalls als Spalte annimmt.

3.2 Zerlegung eine Matrix in Zeilen und Spalten

Wenn wir die Zeilen einer Matrix zu Zeilenvektoren zusammenfassen, erhalten wir für eine Matrix die oft nützliche Darstellung

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{m\,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \hline \vdots \\ \hline a_m \end{pmatrix}.$$

Dabei werden die einzelnen Zeilenvektoren $a_i := (a_{i1}, \ldots, a_{in}) \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ durch waagrechte Striche voneinander getrennt. Wenn wir analog die Spalten einer Matrix zu Spaltenvektoren zusammenfassen, erhalten wir

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1\,n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \dots & b_{m\,n} \end{pmatrix} = \left(b_1 \,\middle|\, \dots \,\middle|\, b_n \right).$$

Dabei werden die einzelnen Spaltenvektoren $b_j \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ der Matrix durch senkrechte Striche voneinander getrennt.

!! Diese Bezeichnungen für Zeilen und Spalten ist hochgradig kontextabhängig. !!

3.3 Matrix-Vektor-Multiplikation

Definition 12

Ist $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ eine $(m \times n)$-Matrix, und ist $v \in \mathbb{K}^n = M_{n,1}(\mathbb{K})$ ein Spaltenvektor der Länge n, dann ist ihr Produkt

$$A \cdot v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \hline \vdots \\ \hline a_m \end{pmatrix} \cdot v = \begin{pmatrix} a_1 \cdot v \\ \vdots \\ a_m \cdot v \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^m$$

ein Spaltenvektor der Länge m. Dabei wird jede Zeile von A mit der Spalte v multipliziert. Es gilt also für die i-te Komponente von $A \cdot v$:

$$(A \cdot v)_i = a_i \cdot v = a_{i1}v_1 + \ldots + a_{in}v_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j.$$

Beispiel 23. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 0-3 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$

3.3 Matrix-Vektor-Multiplikation – Anwendung

Wir betrachten ein lineares Gleichungssytem mit m Zeilen und n Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \quad &= \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Wir fassen die Unbestimmten zusammen zu einem Spaltenvektor $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ der Länge n, die Koeffizienten a_{ij} in der $(m \times n)$-Matrix $A = (a_{ij})$ sowie die Koeffizienten b_i im Spaltenvektor $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ der Länge m. Das lineare Gleichungssystem ist damit äquivalent zur Vektorgleichung

$$A \cdot x = b \,.$$

3.3 Matrix-Vektor-Multiplikation – Eigenschaften

Bemerkung. Für eine Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ und den j-ten Einheitsvektor im $\mathbb{K}^n$ gilt

$$A \cdot e_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} (j-\text{te}) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix},$$

also: Multipliziert man A mit e_j, so erhält man die j-te Spalte von A.

Satz 6

Für eine Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, zwei Spalten $v, w \in \mathbb{K}^n$ und Skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt

$$A \cdot (\lambda v + \mu w) = \lambda A \cdot v + \mu A \cdot w.$$

Man sagt, die Zuordnung $v \mapsto A \cdot v$ ist **linear**.

3.4 Abbildungsmatrizen – Anwendung Matrix-Vektor-Multiplikation

Definition 13

Eine Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ *definiert eine Abbildung* $\phi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *vermöge*

$$v \mapsto \phi_A(v) = A \cdot v.$$

Beispiel 24. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$,

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Die Einheitsmatrix $E_n \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ stiftet die Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $v \mapsto E_n \cdot v = v$,

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{n,n}(\mathbb{R}).$$

Beispiel 25. (1) **Skalarmatrizen** sind die Vielfachen der Einheitsmatrix, $\lambda \cdot E_n$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. Sie multiplizieren jeden Vektor v mit der Zahl λ, z.B. für

$$5 \cdot E_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \text{ mit } \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5v_1 \\ 5v_2 \end{pmatrix} = 5 \cdot v.$$

Insbesondere ist $0 \cdot E_n = o_{n,n}$ die **Nullmatrix**, in der alle Einträge Null sind. Sie schickt jeden Vektor auf $o = o_n$.
(2) Bei **Diagonalmatrizen** $D \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ sind alle Einträge $d_{ij} = 0$ für $i \neq j$,

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_{nn} \end{pmatrix}$$

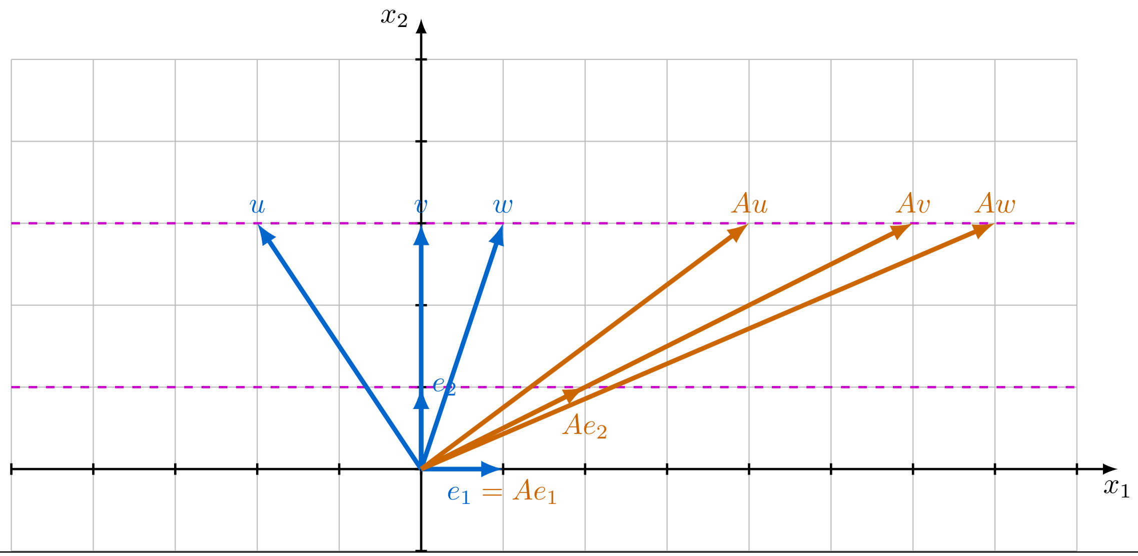
Für die Einheitsvektoren gilt $D \cdot e_j = d_{jj} e_j$. Für $v = (v_j)_j \in \mathbb{R}^n$ folgt $D \cdot v = D \cdot (\sum_{j=1}^n v_j e_j) \overset{lin}{=} \sum_{j=1}^n v_j D \cdot e_j = \sum_{j=1}^n v_j d_{jj} e_j$, d.h. eine Diagonalmatrix multipliziert jede Komponente mit dem entsprechenden Diagonaleintrag d_{jj}.

3.4 Abbildungsmatrizen – Beispiele: Scherung

Beispiel 26. Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ mit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Es gilt

$$A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1, \quad \text{und} \quad A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{also} \quad A \cdot v = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + \alpha v_2 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$



3.4 Lineare Abbildungen

Satz 7

(i) Die durch $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ gegebene Abbildung $\phi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $v \mapsto A \cdot v$, ist **linear**, *d.h. für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt*

$$\phi_A(\lambda v + \mu w) = \lambda \phi_A(v) + \mu \phi_A(w).$$

(ii) Die lineare Abbildung ϕ_A wird umkehrbar eindeutig festgelegt durch die Bilder der Standardbasisvektoren $e_1, \ldots, e_n$.

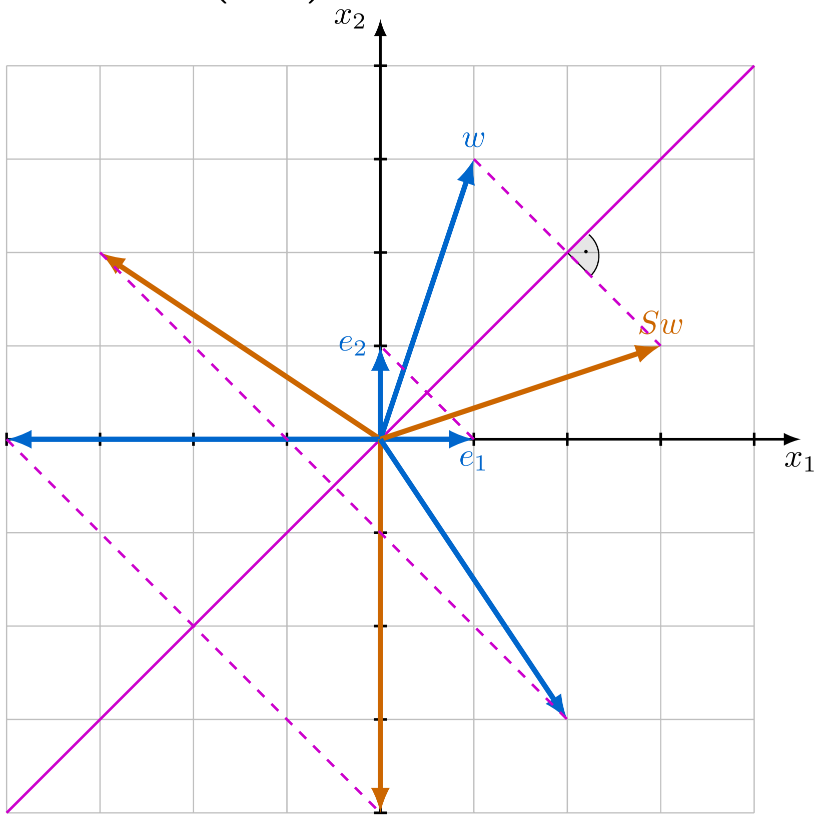
Beweis. (i) folgt direkt aus der Eigenschaft $A \cdot (\lambda v + \mu w) = \lambda A \cdot v + \mu A \cdot w$ (Satz 6). (ii) Weil $v = \sum_{j=1}^n v_j e_j$ eindeutig dargestellt wird in der Standardbasis, ist $\phi_A(v) \stackrel{(i)}{=} \sum_{j=1}^n v_j \phi_A(e_j)$ eindeutig bestimmt durch die Bilder $\phi_A(e_j)$ der e_j.

Erinnere: Die Spalten von A sind die Bilder der Einheitsvektoren $\phi_A(e_j) = A \cdot e_j = a_j$ (j-te Spalte von A).

Umgekehrt: Indem man n Spalten $a_j \in \mathbb{R}^m$ wählt, legt man eine lineare Abbildung fest durch $\phi_A(e_j) := a_j$. Die zugehörige Abbildungsmatrix ist dann $A = (a_1| \ldots |a_n)$.

3.4 Lineare Abbildungen – Achsenspiegelung

Sei $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, also $\phi_S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v \mapsto S \cdot v$.



Es gilt $S \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2$,

$S \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_1$ und allgemein

$S \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$.

S beschreibt die Achsenspiegelung an der Winkelhalbierenden.

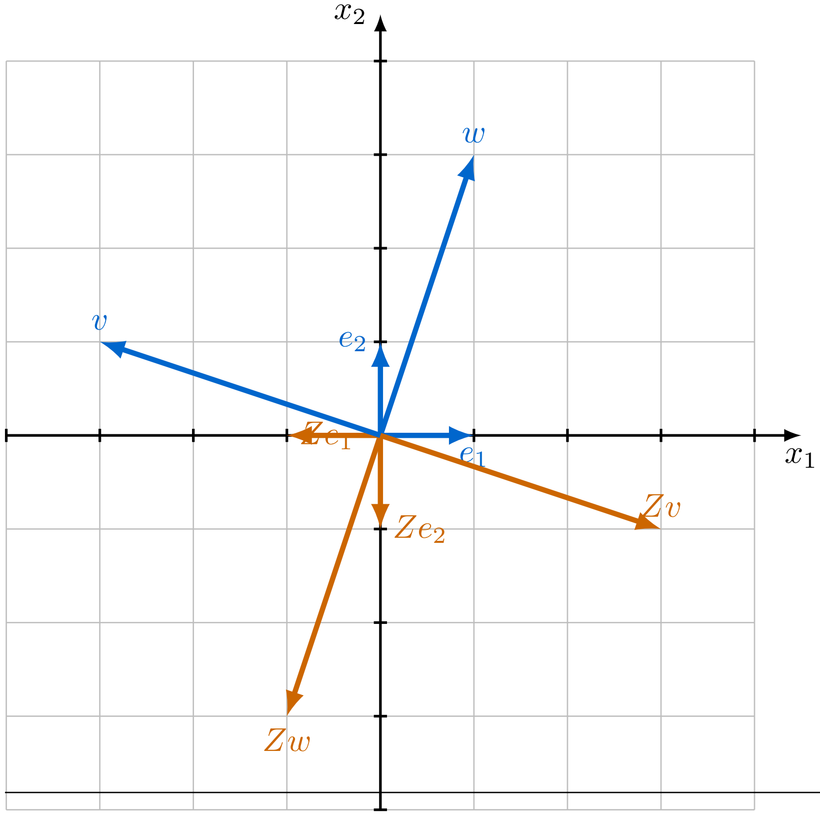
In der Tat bleiben die Vektoren $\begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix}$ fest.

3.4 Lineare Abbildungen – Punktspiegelung am Ursprung

Die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v \mapsto \phi(v) := -v$ ist linear, denn es gilt

$$\phi(\lambda v + \mu w) = -(\lambda v + \mu w) = \lambda(-v) + \mu(-w) = \lambda\phi(v) + \mu\phi(w)$$

für alle $v, w \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.



Die Abbildungsmatrix $Z \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ hat als Spalten z_1, z_2 die Bilder der Einheitsvektoren e_1, e_2, also:
$z_1 = \phi(e_1) = -e_1$ und
$z_2 = \phi(e_2) = -e_2$. Somit:

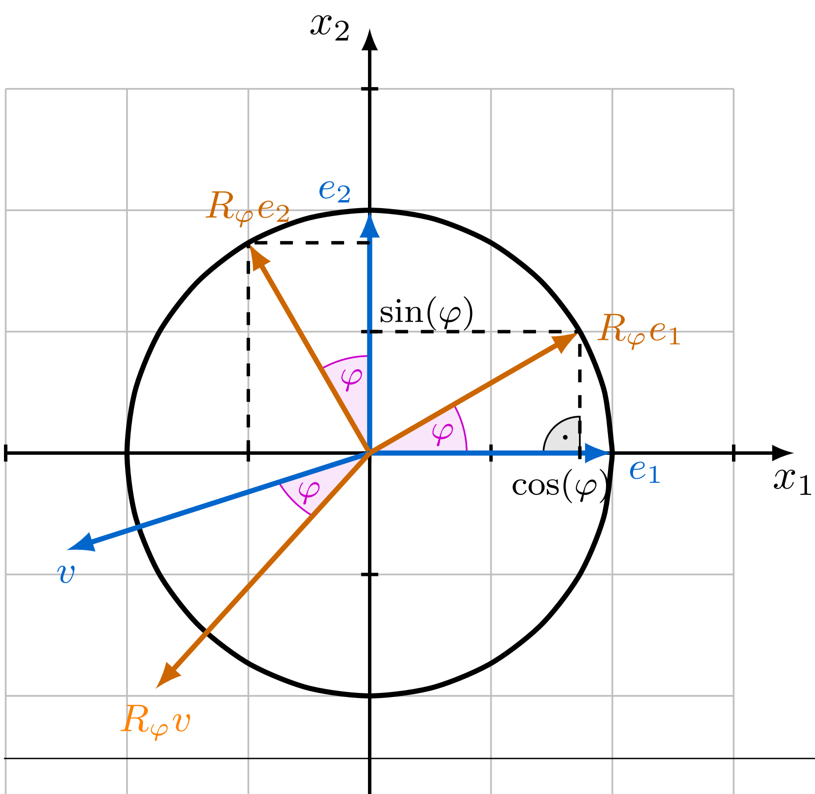
$$Z = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3.4 Lineare Abbildungen – Drehungen

Für Drehungen $R_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um den Winkel φ gilt:

$$R_\varphi(\lambda v) = \lambda R_\varphi(v), \quad R_\varphi(v+w) = R_\varphi(v) + R_\varphi(w.)$$

Also sind Drehungen lineare Abbildungen. Finde die Abbildungsmatrix!



Es gilt

$$e_1 \mapsto R_\varphi(e_1) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix},$$

$$e_2 \mapsto R_\varphi(e_2) = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

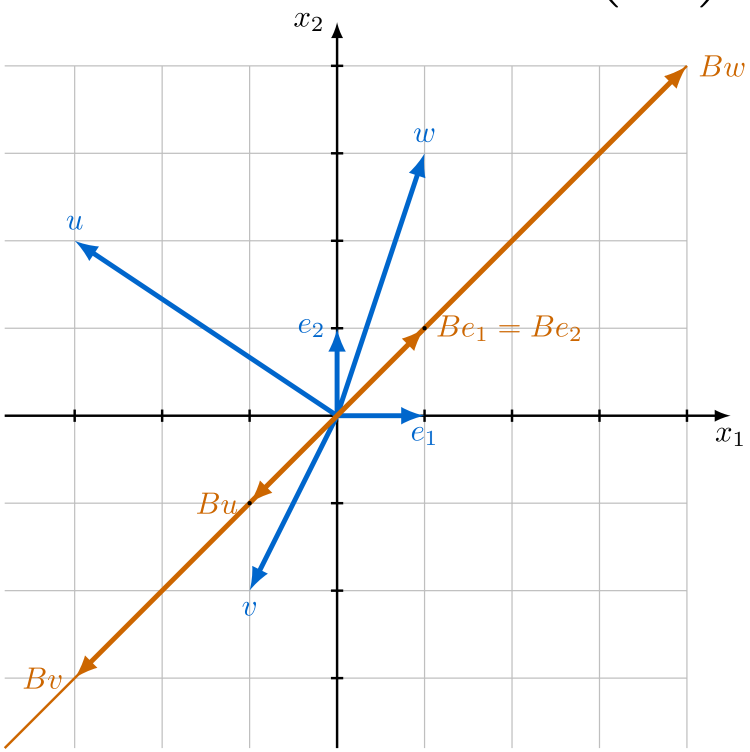
Somit

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix}.$$

3.4 Lineare Abbildungen – Beispiel

Die bisher betrachteten linearen Abbildungen waren bijektiv, denn die Bilder der Standardbasisvektoren bildeten wieder eine Basis. Jetzt ein anderes Beispiel:

Beispiel 27. Es sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$. Es gilt $B \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = B \cdot e_2$.

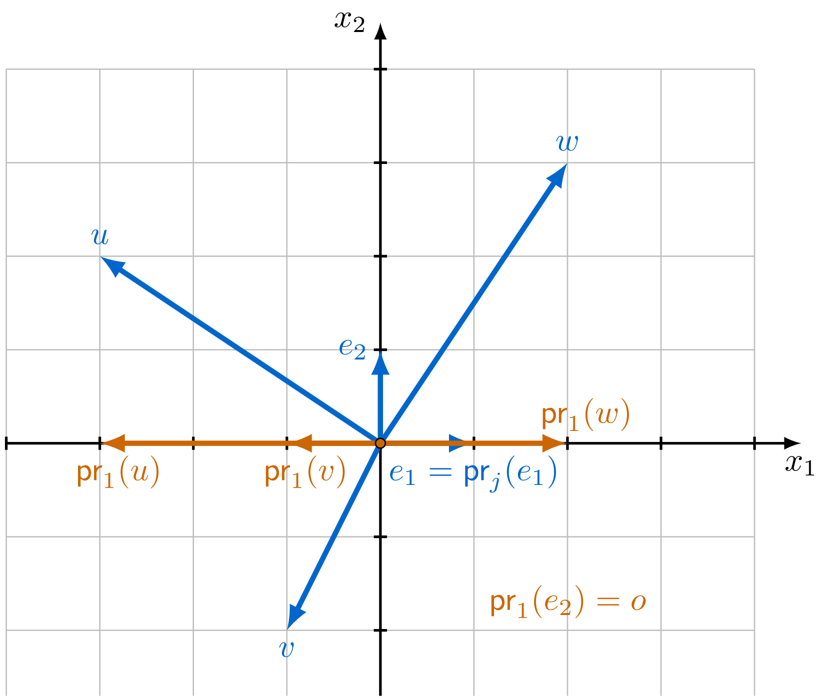


Die Abbildung $\phi_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist somit nicht injektiv.
Sie ist auch nicht surjektiv: Alle Bilder haben die Form $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, denn es ist
$\phi_B(\mathbb{R}^2) = \{B \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = (v_1 + v_2) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid v_1, v_2 \in \mathbb{R}\}$.
Somit ist z.B. $e_1 \notin \phi_B(\mathbb{R}^2)$.

Einige einfache Beispiele für nicht-quadratische Abbildungsmatrizen:

Beispiel 28. Die Abbildung $\mathrm{pr}_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v = (v_k)_k \mapsto v_j$ ist linear, denn

$$\mathrm{pr}_j(\lambda v + \mu w) = \lambda v_j + \mu w_j = \lambda \mathrm{pr}_j(v) + \mu \mathrm{pr}_j(w).$$



Die Spalten der Abbildungsmatrix sind

$$\mathrm{pr}_j(e_k) = \delta_{jk} := \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases},$$

also

$$\mathrm{pr}_j : v \mapsto (0 \ldots 0 \underbrace{1}_{j-te} 0 \ldots 0) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v_j.$$

Solche Projektionen sind offensichtlich surjektiv, aber nicht injektiv.

3.4 Lineare Abbildungen – Einbettungen

Einen Vektorraum $\mathbb{R}^k$ kann man in den $\mathbb{R}^n$ einbetten, wenn $k \leq n$, zum Beispiel, indem man ihn mit den ersten k Koordinatenkomponenten identifiziert. Die zugehörige Abbildung

$$\iota : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n, v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

ist linear, $\iota(\lambda v + \mu w) = \lambda \iota(v) + \mu \iota(w)$. Die zugehörige Abbildungsmatrix J hat die Spalten $j_l = \iota(e_{l,\mathbb{R}^k}) = e_{l,\mathbb{R}^n}$.

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_{n,k}(\mathbb{R}).$$

3.5 LGS revisited – Homogene LGS

Ein LGS $A \cdot x = b$ aufstellen heißt nach dem Urbild $\phi_A^{-1}(b)$ fragen.

Satz 8

Es sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ eine Matrix.
(a) Das **homogene** *LGS $A \cdot x = o$ in n Unbestimmten hat immer (mindestens) eine Lösung, nämlich den Nullvektor $o \in \mathbb{R}^n$.*
(b) Genauer ist seine Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = o\} \subset \mathbb{R}^n$$

ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$. Dieser heißt **Kern** *$ker(A)$ der Matrix A.*

Beweis. Offensichtlich ist $A \cdot o = o$, also gilt $o \in \mathbb{L}$.
Sind weiter $x, y \in \mathbb{L} \subset \mathbb{K}^n$ zwei Lösungen, also $A \cdot x = o = A \cdot y$, dann gilt nach Satz 6 für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$A \cdot (\lambda x + \mu y) = \lambda A \cdot x + \mu A \cdot y = \lambda o + \mu o = o.$$

Also ist auch $\lambda x + \mu y \in \mathbb{L}$, und somit $\mathbb{L}$ ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$. $\square$

Lehrstuhl A für Mathematik

RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.5 LGS revisited – Inhomogene LGS

Satz 9

Es sei $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ eine Matrix und $b \in \mathbb{R}^m$ ein Spaltenvektor.
(a) Das **inhomogene** *LGS $A \cdot x = b$ in n Unbestimmten hat* **nicht** *immer eine Lösung. Es hat eine Lösung genau dann, wenn $b \in Bild(A) = \phi_A(\mathbb{R}^n)$.*
(b) Ist seine Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A \cdot x = b\} \subset \mathbb{R}^n$$

nicht leer, dann sei $y \in \mathbb{L}$ beliebig und $ker(A)$ die Lösung des homogenen Systems. Dann ist

$$\mathbb{L} = \{y + x \mid x \in ker(A)\},$$

also: Jede Lösung lässt sich schreiben als Summe aus einer speziellen Lösung und einer Lösung des homogenen LGS.

Beweis. Für $\tilde{y}, y \in \mathbb{R}^n$ gilt: $A \cdot \tilde{y} = A \cdot y \Leftrightarrow A \cdot \tilde{y} - A \cdot y = o \Leftrightarrow A \cdot (\tilde{y} - y) = o$. Also ist $y, \tilde{y} \in \mathbb{L}$ gleichbedeutend damit, dass $\tilde{y} = y + x$ mit $x := \tilde{y} - y \in \ker(A)$. $\square$

3.5 LGS revisited – Inhomogenes Beispiel

Im nächsten Beispiel ist das inhomogene LGS nicht eindeutig lösbar.

Beispiel 29. Wir betrachten nun das Gleichungssystem mit der Begleitmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{|l} \\ II - 2 \cdot I = II' \\ + II' \end{array}$$

Durch die angegebenen Zeilenumformungen erhalten wir

$$\iff \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{|l} I + 2/5 \cdot II = I', 1/3 \cdot I' \\ \cdot (-1/5) \\ \end{array} .$$

Diese Umformungen räumen die Zeilen noch so gut wie möglich aus:

$$\iff \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/15 & 7/15 & 2/15 \\ 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

3.5 LGS revisited – Inhomogenes Beispiel

Diese Begleitmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1/15 & 7/15 & 2/15 \\ 0 & 1 & 2/5 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

gehört zum linearen Gleichungssystem

$$\left| \begin{array}{ccccccc} x_1 & & + & \frac{1}{15}x_3 & + & \frac{7}{15}x_4 & = & \frac{2}{15} \\ & x_2 & + & \frac{2}{5}x_3 & - & \frac{1}{5}x_4 & = & -\frac{1}{5} \end{array} \right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{ccccccc} x_1 & = & - & \frac{1}{15}x_3 & - & \frac{7}{15}x_4 & + & \frac{2}{15} \\ x_2 & = & - & \frac{2}{5}x_3 & + & \frac{1}{5}x_4 & - & \frac{1}{5} \end{array} \right|.$$

In der Lösungsmenge sind also die Variablen x_3, x_4 frei wählbar und die Variablen x_1, x_2 abhängig. Es ergibt sich

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 2/15 \\ -1/5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1/15 \\ -2/5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -7/15 \\ 1/5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;:\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH AACHEN UNIVERSITY

3.5 LGS revisited – Inhomogenes Beispiel

Dabei ist $y = \begin{pmatrix} \frac{2}{15} \\ \frac{-1}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine spezielle Lösung des LGS, und der Kern von A, also die Lösung des homogenen Systems, ist

$$\ker(A) = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} \frac{-1}{15} \\ \frac{-2}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \frac{-7}{15} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} = \langle \begin{pmatrix} \frac{-1}{15} \\ \frac{-2}{5} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-7}{15} \\ \frac{1}{5} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle_{\mathbb{R}}.$$

Die Lösungsmenge von $A \cdot x = b$ läßt sich damit auch schreiben als

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{2}{15} \\ \frac{-1}{5} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x \ : \ x \in \ker(A) \right\}.$$

3.6 Zusatz: Der Rang einer Matrix

Erinnerung: Die Matrix A eines LGS kann durch elementare Zeilenumformungen immer auf reduzierte Zeilenstufenform gebracht werden,

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & (*) & 0 & (*) & (*) & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\
0 & 1 & (*) & 0 & (*) & (*) & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 1 & (*) & (*) & 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & (*) & \dots & 0 & \dots & \dots \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 & (*) & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0
\end{pmatrix}.$$

Deshalb kann A höchstens r (Anzahl der Zeilen $\neq 0$) linear unabhängige Zeilen besitzen. Es gilt sogar:

3.6 Zusatz: Der Rang einer Matrix

Lemma 10

Die r Zeilenvektoren in der Zeilenstufenform einer Matrix A, die nicht identisch Null sind, sind linear unabhängig. Es kann also keine weitere annuliert werden.

Beweis. Wären Sie linear abhängig, so wäre einer der Zeilenvektoren, z. B. z_r als Linearkombination $z_r = \mu_1 z_1 + \ldots + \mu_{r-1} z_{r-1}$ der anderen ausdrückbar. Damit könnte man aber mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen die Zeile z_r auch noch annullieren, indem man von z_r nacheinander das μ_i-fache der i-ten Zeile abzieht. $\square$

Damit erhalten wir eine Charakterisierung der Zahl r: Sind $a_1, \ldots, a_m$ die m Zeilenvektoren einer Matrix A, so ist $U := \langle a_1, \ldots, a_m \rangle \subset \mathbb{R}^m$ ein Untervektorraum. Die Dimension dieses Raumes ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren der Matrix A. Sie ändert sich nicht unter elementaren Zeilenumformungen.

Definition 14

Die Zahl $r = \operatorname{rang}(A) := \dim(a_1, \ldots, a_m)$ heißt **Rang** *der Matrix A.*

3.7 Lineare Abbildungen – Verkettung

Es seien $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\psi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ zwei lineare Abbildung.
Dann ist ihre Verkettung $\psi \circ \phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^l$ wohldefiniert und **wieder linear**, denn für alle $v, w \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\psi \circ \phi(\lambda v + \mu w) \overset{\phi \text{ lin}}{=} \psi\left(\lambda\phi(v) + \mu\phi(w)\right) \overset{\psi \text{ lin}}{=} \lambda\psi(\phi(v)) + \mu\psi(\phi(w)).$$

Wir bestimmen die Abbildungsmatrix C von $\psi \circ \phi$. Sie hat die Spalten $\psi \circ \phi(e_{j,\mathbb{R}^n})$.
Seien $A \in M_{l,m}(\mathbb{R})$ bzw. $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ die Abbildungsmatrizen von ψ bzw. ϕ.
Es gilt $\phi(e_{j,\mathbb{R}^n}) = b_j = \sum_{i=1}^m b_{ij} e_{i,\mathbb{R}^m}$ sowie $\psi(e_{i,\mathbb{R}^m}) = \sum_{k=1}^l a_{ki} e_{k,\mathbb{R}^l}$. Also ist die j-te Spalte von C wegen der Linearität der Abbildungen

$$\psi \circ \phi(e_{j,\mathbb{R}^n}) = \psi(\sum_{i=1}^m b_{ij} e_{i,\mathbb{R}^m}) = \sum_{i=1}^m b_{ij} \sum_{k=1}^l a_{ki} e_{k,\mathbb{R}^l} = \sum_{k=1}^l \underbrace{\sum_{i=1}^m a_{ki} b_{ij}}_{c_{kj}} e_{k,\mathbb{R}^l}.$$

Die Matrix C hat die Einträge $c_{kj} = a_k \cdot b_j$, wobei a_k die k-te Zeile von A und b_j die j-te Spalte von B ist.

3.7 Matrix-Matrix-Multiplikation

Definition 15

Seien $A \in M_{l,m}(\mathbb{R})$ und $B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ zwei Matrizen. Dann ist Ihr Produkt $C = A \cdot B$ definiert als die Matrix mit den Einträgen

$$c_{kj} = \sum_{i=1}^{m} a_{ki} b_{ij} = a_k \cdot b_j,$$

wobei a_k die k-te Zeile von A und b_j die j-te Spalte von B ist.

Beispiel 30. Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\beta) & \cos(\beta) & 0 \end{pmatrix}.$$

($A \cdot B \cdot v$ liefert die y-Koordinate des um β in der x-y-Ebene gedrehten Vektors v.)

3.7 Matrix-Matrix-Multiplikation – Eigenschaften

- Das Produkt $A \cdot B$ ist nur dann definiert, wenn A exakt so viele Spalten hat wie B Zeilen.
- Das Matrixprodukt ist assoziativ, $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.
- Matrix-Multiplikation und die Matrix-Addition sind distributiv verträglich

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \quad \text{bzw.} \quad A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C.$$

  (Dabei sind jeweils A, B, C Matrizen passender Abmessungen.)
- Matrix-Multiplikation ist **nicht** kommutativ.
  D.h. selbst wenn $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ beides quadratische Matrizen sind, so gilt im allgemeinen $A \cdot B \neq B \cdot A$.
  Beispiel: Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

  Also ist offenbar $A \cdot B \neq B \cdot A$.

3.7 Doppeldrehung

Wir wissen bereits, dass eine Drehung um den Winkel α in der Ebene beschrieben wird durch die Drehmatrix $A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R})$. Drehen wir nun erst um einen Winkel β und anschließend noch um α, dann entspricht das der Abbildung, die durch das Produkt $C = A \cdot B$ gegeben wird:

$$\begin{aligned} C &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta), & -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta), & -\sin(\alpha)\sin(\beta) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Andererseits erhalten wir die Abbildungsmatrix C der Doppeldrehung auch als Drehmatrix um den Winkel $\alpha + \beta$

$$C = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$$

3.7 Doppeldrehung

Nach Satz 7 ist die Matrix einer linearen Abbildung (bzgl. der Standardbasis) eindeutig bestimmt, also müssen die beiden Darstellungen übereinstimmen. Vergleichen wir die Einträge, so erhalten wir:

Satz 11 (Additionstheoreme)

Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\begin{aligned} \cos(\alpha+\beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta), \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta). \end{aligned}$$

Somit ist auch dieses Resultat aus dem Teil Analysis bewiesen.

3.8 Lineare Abbildung – Umkehrabbildung

Zu manchen linearen Abbildungen existiert eine Umkehrabbildung.
Beispiel: Zur Drehung um α ist die Rückdrehung um $-\alpha$ die Umkehrabbildung

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2 \,\hat{=}\, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}.$$

Eine Abbildung ist genau dann umkehrbar, wenn sie bijektiv ist.

Eine lineare Abbildung $\phi_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist genau dann injektiv, wenn ihr Kern $\ker(A)$ gleich Null ist. Genau dann sind die Bilder der Standardbasisvektoren nämlich $Ae_1, \dots, Ae_n$ linear unabhängig. Dazu muss zwingend $n \leq m$ gelten (Dimension!).
ϕ_A ist surjektiv, genau dann wenn $Ae_1, \dots, Ae_n$ den Zielbereich $\mathbb{R}^m$ erzeugen. Dazu muss zwingend $n \geq m$ gelten. Aus beidem zusammen folgt $m = n$.

Definition 16

Ist $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine quadratische Matrix, dann heißt eine Matrix $B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ die zu A **inverse Matrix**, *wenn gilt*

$$A \cdot B = E_n.$$

Satz 12

Sei $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ eine quadratische Matrix. Dann gilt:

(i) *A besitzt genau dann eine inverse Matrix B, wenn $\ker(A) = \{o\}$.*

(ii) *Wenn eine inverse Matrix B existiert, dann gilt auch $B \cdot A = E_n$.*

(iii) *Wenn eine inverse Matrix existiert, so ist B eindeutig bestimmt.*

Beispiel 31. Es sei $D = \begin{pmatrix} d_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & d_{nn} \end{pmatrix}$ eine Diagonalmatrix. Weil die Spalten $d_j = De_j = d_{jj}e_j$ Vielfache der Standardbasisvektoren sind, sind sie linear abhängig nur dann, wenn eines der d_{jj} gleich Null ist.

Gilt $d_{jj} \neq 0$ für $j = 1, \ldots n$, dann ist $D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_{11}} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{d_{nn}} \end{pmatrix}$ die zu D inverse Matrix, denn $D^{-1}D = DD^{-1} = E_n$.

Beispiel 32. Eine (2×2)-Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ist genau dann invertierbar, wenn $ad - bc \neq 0$. In diesem Fall ist $B = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ die zu A inverse Matrix.

Beweis. „$\Leftarrow$“: Wenn $ad - bc \neq 0$, dann ist B wohldefiniert und wir rechnen direkt nach, dass $A \cdot B = E_2$.
„$\Rightarrow$“: Wenn $ad - bc = 0$, unterscheide zwei Fälle: Falls $a \neq 0$ multiplizieren wir die zweite Zeile von A mit a und ziehen von ihr das c-fache der ersten Zeile ab und erhalten $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ also ist $\ker(A) \neq \{o\}$ und somit A nicht injektiv, also nicht invertierbar.
Falls $a = 0$, so folgt aus $ad - bc = 0$, dass auch $b = 0$ oder $c = 0$ gelten muss. Dann ist $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$ oder $A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$. In beiden Fällen ist A wiederum nicht injektiv, also nicht invertierbar.

3.8 Lineare Abbildungen – Schlussbemerkung

Bemerkung.
Alle Aussagen, die wir hier für Matrizen $M_{m,n}(\mathbb{R})$ kennengelernt haben gelten ebenso für Matrizen über beliebigen Körpern $\mathbb{K}$.
Wir haben also nur Eigenschaften von $\mathbb{R}$ benutzt, die auf die Körperaxiome zurückzuführen sind.
Wir haben lediglich aus Gründen der Anschaulichkeit darauf verzichtet.

Bei unserem folgenden, letzten Thema hingegen, den euklidischen Räumen, benötigen wir spezielle Eigenschaften der reellen Zahlen, wie deren Vollständigkeit und den Absolutbetrag.

4.1 Euklidische Räume - Das Skalarprodukt

Euklidische Räume zeichnen sich dadurch aus, dass sich in ihnen Längen und Winkel messen lassen (und somit auch Flächen und Volumina). Alle derartigen Messungen lassen sich aus einer speziellen Abbildung ableiten, dem sogenannten **Skalarprodukt**.

Definition 17

Das **Standard-Skalarprodukt** $\langle -, - \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *zweier Vektoren*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

ist gegeben durch

$$\langle x, y \rangle := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j \in \mathbb{R}.$$

Bemerkung. Ersetzen wir die Spalte $x \in \mathbb{R} = M_{n,1}(\mathbb{R})$ durch die Zeile $x^T = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \in M_{1,n}(\mathbb{R})$, dann gilt $\langle x, y \rangle = x^T \cdot y$.

4.1 Euklidische Räume - Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt hat die folgenden Eigenschaften:

Satz 3

Für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ **(Symmetrie)**,
2. $\langle x + z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$ *sowie* $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$ **(Linearität)**,
3. $\langle x, x\rangle \geq 0$ *und* $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = o$ **(positive Definitheit)**.

Bemerkung. Aus der Symmetrie des Skalarproduktes folgt, dass die anderen beiden Eigenschaften auch für die zweiten Argumente richtig sind, d.h.

$$\begin{aligned} \langle x, y + z\rangle &= \langle y + z, x\rangle = \langle y, x\rangle + \langle z, x\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle, \\ \langle x, \lambda y\rangle &= \langle \lambda y, x\rangle = \lambda\langle y, x\rangle = \lambda\langle x, y\rangle. \end{aligned}$$

4.1 Euklidische Räume - Die Euklidische Norm

Die Länge von Vektoren wird wie folgt aus dem Skalarprodukt abgeleitet.

Definition 18

Die euklidische **Norm** $\| - \| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *auf* $\mathbb{R}^n$ *ist gegeben durch*

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Weil das Skalarprodukt positiv definit ist, hat jeder Vektor eine nicht negative Länge. Der einzige Vektor der Länge Null ist o.

Beispiel 33. Im $\mathbb{R}^2$ ist die Länge von $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Das ist die Länge, die wir nach dem **Satz von Pythagoras** erwarten.

Beispiel 34. Für die Standardbasis-Vektoren $e_1, \ldots, e_n$ des $\mathbb{R}^n$ gilt

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{falls } i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Insbesondere gilt $\|e_j\| = \sqrt{\langle e_j, e_j \rangle} = 1$ für alle j.

Definition 19

Zwei Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^n$ heißen **orthogonal**, *wenn ihr Skalarprodukt $\langle x, y \rangle = 0$ ist.*

Beispiel 35. (1) $o \in \mathbb{R}^n$ ist orthogonal zu jedem Vektor $y \in \mathbb{R}^n$.

(2) Sei $o \neq x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gegeben. Dann ist der Vektor $y = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$ orthogonal zu x, da

$$\langle x, y \rangle = x_1 x_2 - x_1 x_2 = 0.$$

(3) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \perp v = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, denn $\langle u, v \rangle = 3 - 5 + 2 = 0$.

4.1 Euklidische Räume - Das Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren $o \neq x, y \in \mathbb{R}^2$ besitzt folgende anschauliche Bedeutung:

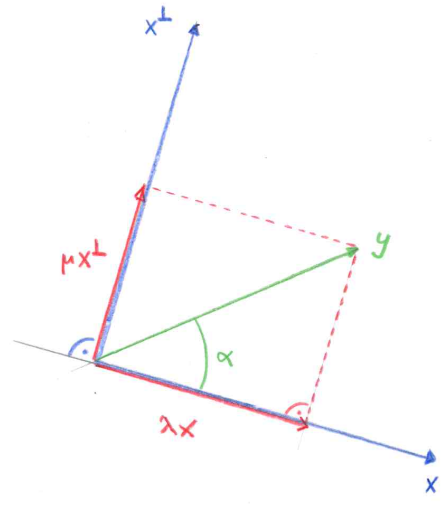
Satz 4

Sind $o \neq x, y \in \mathbb{R}^2$ ebene Vektoren und $\alpha \in [0, \pi]$ der Winkel zwischen den beiden Vektoren. Dann ist

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos(\alpha).$$

Beweis. Die Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ und $x^\perp := \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}$ sind nach Beispiel 35 orthogonal. Sie sind auch linear unabhängig, denn aus $w := \beta x + \gamma x^\perp = o$ folgt $0 = \langle w, w \rangle = \beta^2 + \gamma^2$, also $\beta = \gamma = 0$. Also bilden x, $x^\perp$ eine Basis von $\mathbb{R}^2$, und wir können somit y schreiben als $y = \lambda x + \mu x^\perp$. Daraus folgt

$$\langle x, y \rangle = \langle x, \lambda x + \mu x^\perp \rangle = \lambda \langle x, x \rangle + \mu \langle x, x^\perp \rangle = \lambda \|x\|^2.$$



Wie man an dem Bild sieht, ist aber auch

$$\lambda \|x\| = \|y\| \cos(\alpha).$$

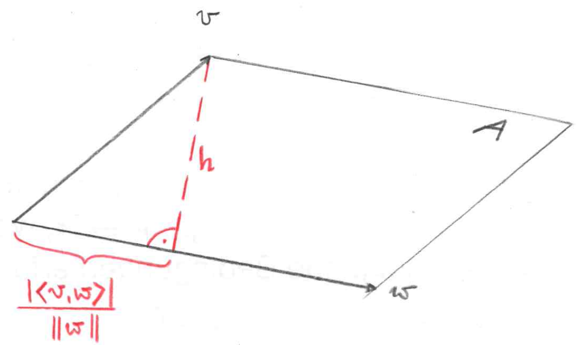
Daraus folgt die Behauptung $\langle x, y \rangle = \|x\| \, \|y\| \cos(\alpha)$. $\square$

Bemerkung. Die Formel ist genauso richtig für $x, y \in \mathbb{R}^n$, wenn man den Winkel zwischen x und y **in der von x und y aufgespannten Ebene** benutzt.

4.1 Euklidische Räume - Das Skalarprodukt

Beispiel 36. Die Fläche eines Parallelogramms.

Die Fläche des von $v, w \in \mathbb{R}^2$ aufgespannten Parallelogramms ist $A = \|w\|\, h$.



Mit $h^2 + \left(\frac{\langle v,w\rangle}{\|w\|}\right)^2 = \|v\|^2$ nach dem Satz von Pythagoras folgt

$$A = \sqrt{\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle - \langle v, w\rangle^2}.$$

Bemerkung. Die Formel gilt genauso für die Fläche eines von $x, y \in \mathbb{R}^n$ aufgespannten Parallelogramms.

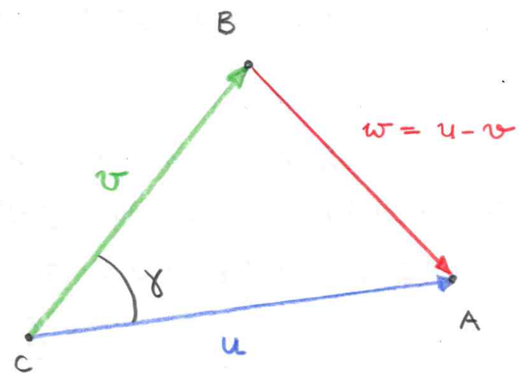
4.2 Anwendung: Der Cosinussatz

Mit Hilfe der Vektorrechnung kann man verschiedenste Aussagen der analytischen Geometrie beweisen, z.B. den **Cosinussatz**:

Satz 5

Ist $\Delta(A, B, C)$ ein Dreieck mit den Eckpunkte $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ und den Seitenlängen a, b, c, und ist $\gamma = \gamma(a, b)$ der (unorientierte) Innenwinkel zwischen a und b, so gilt $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$.

Beweis. Sei $u = A - C$ mit $v = B - C$, wobei $a = \|v\|$ und $b = \|u\|$. Dann ist $w = A - B = u - v$.



Dann ist

$$
\begin{aligned}
c^2 &= \langle w, w\rangle \\
&= \langle u - v, u - v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle - 2\langle u, v\rangle \\
&= b^2 + a^2 - 2ab\cos(\gamma).
\end{aligned}
$$

4.3 Anwendung: Abstand Punkt zu Gerade in der Ebene

Sei $G := \{x_0 + tv \ : \ t \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ und $y \in \mathbb{R}^2$, $y \notin G$, ein Punkt. Der **Abstand von y zur Geraden** G ist definiert als das Minimum

$$d := \min\{\|x_0 + tv - y\| \ : \ t \in \mathbb{R}\}.$$

Wir betrachten daher die Funktion $D : \mathbb{R} \to [0, \infty), t \mapsto \|x_0 + tv - y\|$ und suchen das Minimum dieser Funktion. Da es einfacher abzuleiten ist, betrachten wir

$$f(t) = D^2(t) = \langle x_0 - y + tv, x_0 - y + tv\rangle = \|x_0 - y\|^2 + 2t\langle v, x_0 - y\rangle + t^2\|v\|^2.$$

Die Ableitung dieser Funktion ist $f'(t) = 2(\langle v, x_0 - y\rangle + t\|v\|^2)$ mit $f''(t) = 2\|v\|^2 > 0$. Damit ist bei $t_M = -\langle v, x_0 - y\rangle/\|v\|^2$ ein Minimum der Funktion und somit ist

$$\begin{aligned} d^2 &= \|x_0 + t_M v - y\| = \|x_0 - y - \frac{\langle v, x_0 - y\rangle}{\|v\|^2} v\|^2 \\ &= \left\langle x_0 - y - \frac{\langle v, x_0 - y\rangle}{\|v\|^2} v, x_0 - y - \frac{\langle v, x_0 - y\rangle}{\|v\|^2} v \right\rangle = \|x_0 - y\|^2 - \frac{\langle v, x_0 - y\rangle^2}{\|v\|^2}. \end{aligned}$$

4.3 Anwendung: Abstand Punkt zu Gerade in der Ebene

Der minimale Abstand d der Geraden zum Punkt y wird also in einem Punkt auf der Geraden angenommen und zwar in

$$x^* = x_0 - \frac{\langle v, x_0 - y\rangle}{\|v\|^2} v.$$

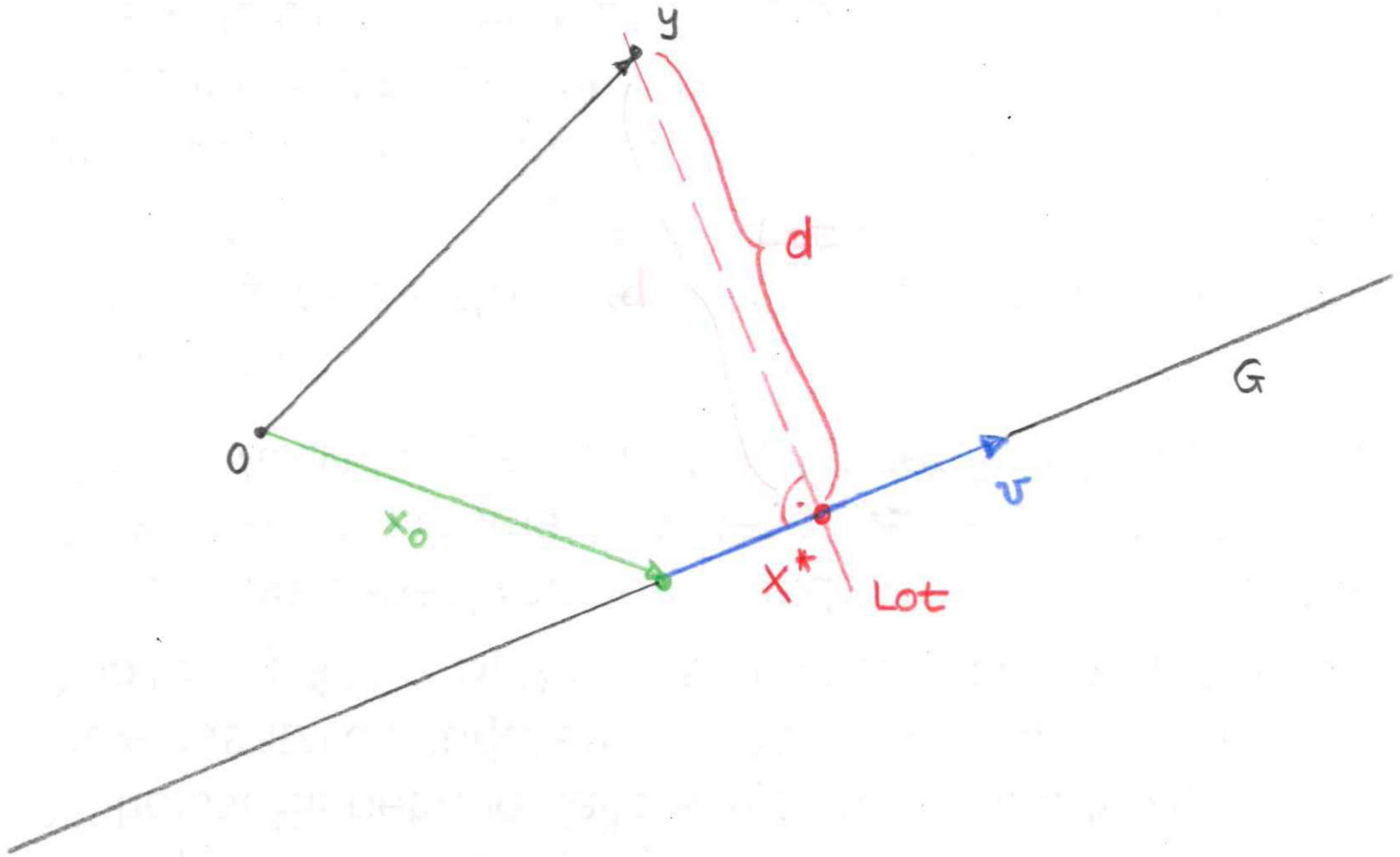
Wie können wir diesen Punkt geometrisch charakterisieren ? Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}\langle v, x^* - y\rangle &= \langle v, x_0 - y - \frac{\langle v, x_0 - y\rangle}{\|v\|^2} v\rangle = \langle v, x_0 - y\rangle - \frac{\langle v, x_0 - y\rangle}{\|v\|^2}\langle v, v\rangle \\ &= \langle v, x_0 - y\rangle - \langle v, x_0 - y\rangle = 0.\end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass der Verbindungsvektor zwischen x^* und y senkrecht auf der Geraden steht und somit der kürzeste Abstand dort angenommen wird, wo das von y ausgehende Lot auf die Gerade die Gerade trifft.

Bemerkung. Diese Tatsache, sowie die Formeln für x^* und d^2 sind in jeder Dimension richtig, wenn man die entsprechenden Skalarprodukte benutzt.

4.3 Anwendung: Abstand Punkt zu Gerade in der Ebene



4.4 Anwendung: Normalenformen

Definition 20

Es sei $g = \{P + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade. Ein Normalenvektor der Geraden g ist ein Vektor $n \neq o$, der senkrecht auf g steht ($v \perp n$). Ein Einheitsnormalenvektor ist ein Normalenvektor der Länge 1.

Es gibt immer zwei Einheitsnormalenvektoren: Ist n_1 der eine, dann ist $-n_1$ der andere. Ist n irgendein Normalenvektor, dann ist $\frac{1}{\|n\|}n$ ein Einheitsnormalenvektor, denn

$$\|\frac{1}{\|n\|}n\| = \sqrt{\langle \frac{1}{\|n\|}n, \frac{1}{\|n\|}n \rangle} = \sqrt{\frac{1}{\|n\|^2}\langle n, n\rangle} = \frac{1}{\|n\|}\sqrt{\langle n, n\rangle} = \frac{1}{\|n\|}\|n\| = 1.$$

Beispiel 37. Sei $g = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$. Dann ist $n = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor, aber auch $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 8 \\ -6 \end{pmatrix}$. Ein Einheitsnormalenvektor ist $\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

4.4 Anwendung: Normalenformen

Satz 13 (Normalenform einer Geraden)

Ist $g = \{P + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^2$ *eine Gerade mit Normalenvektor* n*, dann gilt*

$$g = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x - P, n\rangle = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, n\rangle = d\},$$

wobei $d = \langle P, n\rangle$*.*

Ist n ein Einheitsnormalenvektor, so spricht man von einer **Hesseschen Normalenform**. Schreibt man das Skalarprodukt aus, so findet man

$$g = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid n_1x_1 + n_2x_2 = d\}.$$

Beweis. Es gilt $\langle v, n\rangle = 0$, d.h. $x \in g$ genau dann, wenn $\langle x - P, n\rangle = 0$.
Weiter ist $\langle x - P, n\rangle = \langle x, n\rangle - \langle P, n\rangle = \langle x, n\rangle - d$.
Also gilt $x \in g$ genau dann, wenn $\langle x, n\rangle = d$. □

4.4 Anwendung: Normalenformen

Fortsetzung von Beispiel 37. Sei $g = \{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ mit $n = \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}$.
Dann ist $d = \langle P, n\rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\rangle = 4 - 6 = -2$. Somit finden wir eine Normalenform

$$\begin{aligned} g &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, \begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}\rangle = -2\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^2 \mid 4x_1 - 3x_2 = -2\} \end{aligned}$$

Bemerkung. Im $\mathbb{R}^m$, $m \geq 3$, gibt es keine einfachen Normalenformen für Geraden g, weil es dort viele Richtungen senkrecht zu g gibt. Diese bilden einen $(m-1)$-dimensionalen Untervektorraum N des $\mathbb{R}^m$. Wählt man eine Basis $n_1, \dots n_{m-1}$ von N, dann liegt $x \in \mathbb{R}^m$ genau dann auf der Geraden g, wenn für $j = 1, \dots, m-1$ gilt

$$\langle x - P, n_j\rangle = 0.$$

Das sind $m-1$ lineare Gleichungen. Die Gerade g ist die Lösungsmenge dieses LGS.

4.4 Anwendung: Normalenformen

Satz 14 (Normalenform einer Ebene)

Ein Vektor $n \in \mathbb{R}^3 \setminus \{o\}$ heißt **Normalenvektor** *der Ebene*

$$E = \{P + \lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3,$$

wenn er senkrecht auf E steht ($n \perp v$, $n \perp w$). Dann gilt

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x - P, n\rangle = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, n\rangle = d\},$$

wo $d = \langle P, n\rangle$.
Ist $\|n\| = 1$, dann heißt sie **Hessesche Normalenform**. *In Koordinaten:*

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = d \right\}.$$

Beweis. Ganz analog zum Fall einer Geraden gilt $g = P + \lambda v + \mu w \in E$ genau dann, wenn $\langle n, x - P\rangle = \langle n, \lambda v + \mu w\rangle = \lambda\langle n, v\rangle + \mu\langle n, w\rangle = 0$.

4.4 Anwendung: Normalenformen

Satz 15 (Kreuzprodukt)

Das **Kreuzprodukt/Vektorprodukt** *von* $v, w \in \mathbb{R}^3$ *definiert durch*

$$v \times w = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}$$

steht senkrecht auf v *und* w*. Offensichtlich gilt* $v \times w = -w \times v$*.*

Beweis. Es gilt $\langle v \times w, v\rangle = \langle \begin{pmatrix} v_2 w_3 - v_3 w_2 \\ v_3 w_1 - v_1 w_3 \\ v_1 w_2 - v_2 w_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \rangle = (v_2 w_3 - v_3 w_2) v_1 + (v_3 w_1 -$
$- v_1 w_w) v_2 + (v_1 w_2 - v_2 w_1) v_3 = 0.$
(Analog zeigt man $\langle v \times w, w\rangle = 0$.)

4.4 Anwendung: Normalenformen

Es sei $E = \{\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{P} + \lambda \underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}}_{v} + \mu \underbrace{\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix}}_{w} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Durch das Kreuzprodukt der Richtungsvektoren finden wir einen Normalenvektor

$$n = v \times w = \begin{pmatrix}0\cdot 4 - 2\cdot 2\\ 2\cdot 2 - 1\cdot 4\\ 1\cdot 2 - 0\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Weiter ist $\langle P, n\rangle = \langle \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}\rangle = -2$. Also wird eine Normalenform von E gegeben durch

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle \begin{pmatrix}-4\\0\\2\end{pmatrix}, x\rangle = -2\} = \{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -4x_1 + 2x_3 = -2\}.$$