Dr. K. Maurischat Aachen, 19. September 2022

Lineare Algebra
Übungsaufgaben

im Vorkurs Mathematik 2022, RWTH Aachen University

— Lineare Gleichungssysteme I —

Aufgabe 1

Übersetzen Sie jeweils die Textaufgabe in ein lineares Gleichungssystem und lösen Sie es.

a) Vor drei Jahren war Monika dreimal so alt wie Peter. In vier Jahren ist Monika nur noch doppelt so alt wie Peter. Wie alt sind Peter und Monika?

b) Drei normale Brötchen kosten so viel wie zwei Körnerbrötchen. Fünf normale Brötchen sind um 17 Cent teurer als drei Körnerbrötchen. Wie viel kosten normale Brötchen und Körnerbrötchen?

c) Bei Zählungen am Gleisdreieck Mannheim-Friedrichsfeld wird festgestellt, dass in dem beobachteten Zeitraum 38 Züge nach Mannheim fuhren oder aus Mannheim kamen, 33 Züge passierten das nördliche Ende Richtung Weinheim bzw. von Weinheim kommend, und 45 Züge fuhren nach Heidelberg oder kamen aus Heidelberg. Wie viele Züge fuhren auf der Strecke Mannheim–Weinheim, wieviele auf der Strecke Heidelberg–Mannheim und wie viele auf der Strecke Heidelberg–Weinheim?

Aufgabe 2

Geben Sie jeweils ein (möglichst einfaches) Beispiel eines linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Unbekannten an,

a) das genau eine Lösung hat,

b) das unendliche viele Lösungen hat,

c) das keine Lösung hat.

Aufgabe 3

In Abbildung 1 sind verschiedene (sphärische) Polyeder abgebildet.
Für jeden solchen Polyeder gilt, dass die Anzahl k der Kanten genau um 2 kleiner ist als die Summe der Eckenanzahl e und der Flächenanzahl f. Bestehen alle Flächen aus Dreiecken, so ist das Doppelte der Kantenanzahl gleich dem Dreifachen der Flächenanzahl (zählt man nämlich für jedes Dreieck die Kanten, je 3, so hat man am Ende jede Kante doppelt gezählt, weil jede Kante zu zwei Seitenflächen gehört). Ähnlich erhält man einen Zusammenhang zwischen der Eckenanzahl und der Kantenanzahl, wenn an jeder Ecke gleich viele Kanten enden.

a) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem für k, e und f für den Fall des Oktaeders (lauter Dreiecke und an jeder Ecke enden 4 Kanten) auf, und lösen Sie dieses.

b) Stellen Sie entsprechend ein lineares Gleichungssystem auf für ein Polyeder, dessen Seitenflächen lauter Dreiecke sind und bei dem an jeder Ecke fünf Kanten enden. Lösen Sie auch dieses.

c) Stellen Sie entsprechend ein lineares Gleichungssystem auf für ein Polyeder, dessen Seitenflächen lauter Fünfecke sind und bei dem an jeder Ecke drei Kanten enden.

d) Gibt es ein Polyeder aus lauter Dreiecken, bei dem an jeder Ecke sechs Kanten enden?

e) Gibt es ein Polyeder aus lauter Fünfecken, bei dem an jeder Ecke vier Kanten enden?

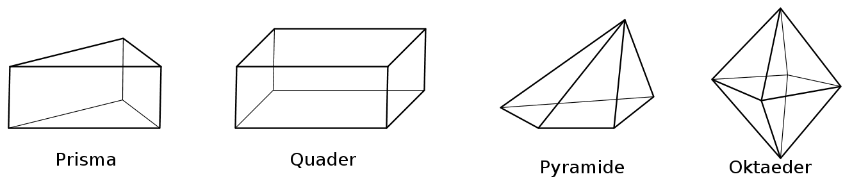


Abbildung 1: Verschiedene Polyeder

Aufgabe 4

Bestimmen Sie jeweils die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungssysteme.

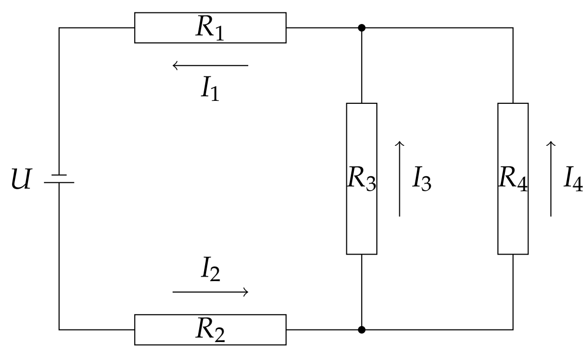
a) $$\begin{array}{rrcr} 2x_1 & -x_2 & = & 4 \\ x_1 & +\frac{1}{2}x_2 & = & -2 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rrcr} 3x_1 & +2x_2 & = & 1 \\ x_1 & -2x_2 & = & 11 \\ -2x_1 & +x_2 & = & 5 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rrrcr} x & +3y & +z & = & 2 \\ 3x & +9y & +4z & = & 10 \\ x & +3y & +2z & = & 6 \end{array}$$

Aufgabe 5

Gegeben sei das folgende Gleichstromnetz:



In einem Gleichstromnetz gelten die Kirchhoffschen Regeln. Die *Knotenregel* besagt, dass in jedem Knoten im Netz die Summe der Ströme, deren Pfeil auf den Knoten hinweist, gleich der Summe der Ströme ist, deren Pfeil vom Knoten wegweist. Die *Maschenregel* besagt, dass, wenn man einen geschlossenen Weg durch das Netz läuft und dabei die Produkte $\pm R_k I_k$ an den durchlaufenen Widerständen aufsummiert (mit positivem Vorzeichen, wenn der Weg in Pfeilrichtung verläuft, und mit negativem Vorzeichen, wenn der Weg entgegen der Pfeilrichtung verläuft), man die Summe der Spannungen der Spannungsquellen auf diesem Weg erhält. Berechnen Sie mit diesen Regeln die Stromstärken in obigem Netz, wenn die Spannungsquelle $36\,\mathrm{V}$ hat und für die Widerstände $R_1 = 200\,\Omega$ sowie $R_2 = 400\,\Omega$ und $R_3 = 300\,\Omega$ sowie $R_4 = 200\,\Omega$ gilt.

— Gauß Algorithmus —

Aufgabe 6

Es seien folgende lineare Gleichungssysteme gegeben. Geben Sie jeweils die zugehörige Koeffizientenmatrix und erweiterte Koeffizientenmatrix (Begleitmatrix) an:

a)

$$\begin{aligned} 3x_1 - 7x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 5x_1 + 4x_3 - x_4 &= 0 \\ -3x_2 + 5x_3 + x_4 - 1 &= 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_3 + x_2 &= 0 \\ x_3 + 4x_1 - 3x_2 &= 0 \\ 6x_2 + x_1 + 3x_3 - 1 &= -1 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 0 \\ 5x_4 - x_1 - x_5 + x_2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der durch die folgenden Begleitmatrizen gegebenen Gleichungssysteme:

$$\text{a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right), \quad \text{b) } \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right), \quad \text{c) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 4 \end{array}\right)$$

$$\text{d) } \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right), \quad \text{e) } \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \end{array}\right), \quad \text{f) } \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Aufgabe 8

Lösen Sie die in Aufgabe 1 aufgestellten linearen Gleichungssysteme mit dem Gauß-Verfahren.

Aufgabe 9

Lösen Sie jeweils das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren.

a) $$\begin{aligned} x + 3y + z &= 1 \\ 3x + 9y + 4z &= 5 \\ x + 3y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 6x_3 - x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 10x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x + 2y + z &= 1 \\ 2y + 2z &= 0 \\ 2x + 5y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 10

Lösen Sie jeweils das lineare Gleichungssystem mit dem Gauß-Verfahren.

a) $$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 6y + 3z &= 8 \\ x - 7y - 4z &= 3 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} 2x + 8y &= 0 \\ 6x + 24y + 3z &= 0 \\ 2x + 8y + z &= 0 \end{aligned}$$

c) $$\begin{aligned} x + 2z &= 1 \\ x + y + z &= 3 \\ 3x + y + 5z &= 6 \end{aligned}$$

d) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 &= 3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

e) $$\begin{aligned} x_1 + 2x_3 + 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 5x_4 &= 0 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 &= 0 \\ 2x_2 + x_3 + 4x_4 &= 0 \end{aligned}$$

f) $$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 8x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 6x_4 &= 0 \\ 2x_3 + 4x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Aufgabe 11

Bestimmen Sie jeweils alle Parameter a, b, c, $d \in \mathbb{R}$, für die die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ die gewünschten Bedingungen erfüllt.

a) Es gilt $f(1) = 1$ und $f(2) = 2$ sowie $f(-1) = 5$.

b) Es gilt $f(1) = 1$ und $f'(1) = -1$ sowie $f(-1) = 1$.

c) Die Gerade mit der Gleichung $y = 3x$ ist die Wendepunkttangente des Graphen von f, und die Wendestelle ist 1.

Aufgabe 12

Untersuchen Sie jeweils in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$, ob das gegebene lineare Gleichungssystem keine, genau eine oder unendlich viele Lösungen hat.

a) $$\begin{aligned} 2x + 4y + az &= 5 \\ 3x + (a+5)y + z &= 7 \\ x + 2y + az &= 3 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} ax + y + z &= a \\ ax + (a+2)y + (2a+1)z &= a - 2 \\ (a^2 + a)y + (3a^2 - 1)z &= -2 \end{aligned}$$

Aufgabe 13

Berechnen Sie:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, c) $2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + (-2) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

d) $\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, e) $\frac{3}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, f) $4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Aufgabe 14

Untersuchen Sie jeweils, ob die gegebenen Vektoren Vielfache voneinander sind.

a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 15

Erzeugen die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

den Vektorraum $\mathbb{R}^3$? Falls nicht, bestimmen Sie die Dimension des von den Vektoren erzeugten Unterraumes von $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 16

Geben Sie jeweils einen weiteren Vektor v an, so dass

(1) die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v$$

eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^2$ bilden.

(2) die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v$$

eine Basis des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe 17

Für welche Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren

$$\begin{pmatrix} a \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

linear unabhängig ?

Aufgabe 18

1. Verifizieren Sie die Vektorraumeigenschaften für $\mathbb{R}^n$ mit der in Definition 2 erklärten Addition und Skalarenmultiplikation.

2. Zeigen Sie, dass die Menge der komplexen Nullfolgen $(a_k)_{k\geqslant 1}$ mit $a_k \in \mathbb{C}$, $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ mit der Addition $(a_k)_{k\geqslant 1} + (b_k)_{k\geqslant 1} := (a_k + b_k)_{k\geqslant 1}$ und der Skalarenmultiplikation $\lambda(a_k)_{k\geqslant 1} := (\lambda a_k)_{k\geqslant 1}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.

Aufgabe 19

Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ bilden einen reellen Vektorraum?

a) $M_1 = \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| r \in \mathbb{R} \right\}$,

b) $M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \middle| s \in \mathbb{R} \right\}$

c) $M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| v_1 + v_2 + v_3 = 2 \right\}$

d) $M_4 = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| v_1 + v_2 + v_3 = 0 \right\}$

Aufgabe 20

Bilden die Polynome vom Grad höchstens 3, d.h. die Polynome $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit der üblichen Addition und der Multiplikation mit reellen Zahlen einen reellen Vektorraum?

Aufgabe 21

a) Bilden die Polynome vom Grad höchstens 3, d.h. die Polynome $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, die die Eigenschaft $f(1) = 0$ erfüllen, mit der üblichen Addition und der Multiplikation mit reellen Zahlen einen reellen Vektorraum?

b) Bilden die Polynome vom Grad höchstens 3, d.h. die Polynome $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, die die Eigenschaft $f(1) = 1$ erfüllen, mit der üblichen Addition und der Multiplikation mit reellen Zahlen einen reellen Vektorraum?

Aufgabe 22

Zeigen Sie: Die Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ sind linear unabhängig genau dann, wenn $ad - bc \neq 0$.

Aufgabe 23

Ist ein einzelner Vektor $v \in V$ linear unabhängig ?

Aufgabe 24

Stellen Sie die Vektoren

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

als Linearkombinationen der drei Basisvektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

dar.

Aufgabe 25

Untersuchen Sie jeweils, ob der dritte Vektor linear abhängig von den ersten beiden Vektoren ist. Falls ja, stellen Sie ihn auch als Linearkombination der ersten beiden Vektoren dar.

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix},$

(b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix},$

(c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 9 \end{pmatrix}.$

Aufgabe 26

Untersuchen Sie jeweils, ob die gegebenen Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind.

(a) $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\7\\1\end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\7\\43\end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix}0\\3\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}$.

Aufgabe 27

Argumentieren Sie möglichst geschickt, ob die gegebenen Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind.

(a) $\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$,

(b) $\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}6\\-2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\12\end{pmatrix}$,

(c) $\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$.

Aufgabe 28

1. Zeigen Sie, dass vier Vektoren in $\mathbb{R}^3$ immer linear abhängig sind.
2. Zeigen Sie, dass $n+1$ Vektoren in $\mathbb{R}^n$ immer linear abhängig sind.

Aufgabe 29

Welche Dimension hat der Vektorraum der Polynome vom Grad kleiner oder gleich drei?

Aufgabe 30

a) Bestimmen Sie eine Basis des Vektorraums in Aufgabe 21 a).

b) Ergänzen Sie die Basis aus a) zu einer Basis des Vektorraums aller Polynome vom Grad höchstens drei.

Aufgabe 31
Geben Sie die folgenden Matrizen A explizit an.

a) $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $a_{i,j} = i \cdot j$ für alle $i, j \in \{1,2,3\}$.

b) $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $a_{i,j} = i^j$ (die j-te Potenz von i) für alle $i, j \in \{1,2,3\}$.

c) $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit $a_{i,j} = i - j$ für alle $i \in \{1,2\}$ und $j \in \{1,2,3\}$.

d) $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{3\times 4}$ mit $a_{i,j} = (i+1) \cdot (j-2)$ für alle $i \in \{1,2,3\}$ und $j \in \{1,2,3,4\}$.

Aufgabe 32
Wie lauten die Einträge $(2,1)$, $(1,2)$, $(2,3)$, $(1,1)$ beziehungsweise $(3,1)$ (falls sie existieren) der folgenden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 18 & 6 \\ \frac{1}{2} & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 3 & 9 \\ 8 & 1 & \frac{1}{4} & 13 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}?$$

Aufgabe 33
Welche der folgenden Matrizen sind gleich?

- $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $a_{ij} = i \cdot j$
- $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $b_{ij} = i + j$
- $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $c_{ij} = \max\{i, j\}$
- $D = (d_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $d_{ij} = \frac{i+j}{2} + \frac{|j-i|}{2}$
- $E = (e_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $e_{ij} = i \cdot \left(\frac{j^2-1}{j+1} + 1\right)$
- $F = (f_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $f_{ij} = (i+1) + (j-1)$

Argumentieren Sie geschickt.

Aufgabe 34
Schreiben Sie in Matrixform

1. die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit Koeffizienten $a_{ij} = |i - j|$,
2. die Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit Koeffizienten $a_{ij} = i - j$,
3. die Matrix $A \in \mathbb{R}^{5\times 5}$ mit Koeffizienten

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$$

4. die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit Koeffizienten

$$a_{ij} = i^2 + j.$$

Aufgabe 35

Geben Sie jeweils an, durch welche elementare Zeilenumformung die Matrix A in die Matrix B transformiert werden kann.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Aufgabe 36

Geben Sie für jede der folgenden Matrizen an, ob sie in (Zeilen-)Stufenform bzw. sogar reduzierter Stufenform ist.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 37

Transformieren Sie die nachfolgenden Matrizen jeweils durch elementare Umformungen in eine Matrix in reduzierter Stufenform.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 6 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 10 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -12 & 13 \\ 1 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 10 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 11 \\ 4 & 1 & 12 & -1 & 11 \\ 3 & 0 & 6 & 1 & 15 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 38

Berechnen Sie.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe 39

Entscheiden Sie, welche der Matrizen und Vektoren miteinander multipliziert werden können und bestimmen Sie ggf. die Matrix-Vektor-Produkte.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \\ -5 & 0 \\ 3 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 40

Finden Sie eine von Null verschieden Matrix $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$ so, dass $A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = o$.

— Lineare Abbildungen —

Aufgabe 41

Stellen Sie die Abbildungsmatrizen der linearen Abbildungen auf, die die Standardbasisvektoren e_1, e_2 schicken auf

a) $e_1 \mapsto e_1 - e_2$, $e_2 \mapsto e_2$.

b) $e_1 \mapsto 3e_2$, $e_2 \mapsto -e_1$.

c) $e_1 \mapsto 5e_1 + 3e_2$, $e_2 \mapsto e_2 + 2e_1$.

Aufgabe 42

Bestimmen Sie das Bild von $v = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ unter den folgenden linearen Abbildungen.

- $\phi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, beschrieben durch $A = \left(\begin{smallmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

- $\phi_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, beschrieben durch $B = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{smallmatrix}\right)$.
- $\phi_C : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, beschrieben durch $C = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
- $\phi_D : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, beschrieben durch $D = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.
- $\phi_E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, beschrieben durch $E = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -3 \end{smallmatrix}\right)$.
- $\phi_F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, beschrieben durch $F = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe 43

Sind die folgenden Abbildungen linear?

a) $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v = v_1e_1 + v_2e_2 \mapsto v_1 - v_2$.

b) $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $v = v_1e_1 + v_2e_2 \mapsto v_1 + 2v_2 - 1$.

Aufgabe 44

Beschreiben sie die Achsenspiegelungen (in der Ebene) durch Matrizen.

a) An der x-Achse.

b) An der y-Achse.

c) An der Winkelhalbierenden des zweiten und vierten Quadranten.

Aufgabe 45

Sind die folgenden Abbildungen linear?

a) $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $v \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot v + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\psi : \mathbb{R} \to M_{2,2}(\mathbb{R})$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$.

c) $\chi : \mathbb{R} \to M_{2,2}(\mathbb{R})$, $t \mapsto \begin{pmatrix} 5t & -t \\ 3t & 2t \end{pmatrix}$.

Aufgabe 46

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden zwei Aussagen für eine Abbildung $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

(i) $\forall v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda, \mu \in \mathbb{R} :\ \phi(\lambda v + \mu w) = \lambda\phi(v) + \mu\phi(w)$

(ii) $\forall v, w \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} :\ \phi(v + w) = \phi(v) + \phi(w) \wedge \phi(\lambda v) = \lambda\phi(v)$

Aufgabe 47

Bestimmen Sie jeweils die geometrische Deutung der linearen Abbildungen, die durch die folgenden Matrizen gegeben werden.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 48

a) Zeigen Sie: Die linearen Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $\phi(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = o$ bilden einen Vektorraum, den wir (bzgl. der Standardbasis) als Untervektorraum von $M_{2,2}(\mathbb{R})$ auffassen wollen.

b) Welche Dimension hat dieser Vektorraum? Geben Sie eine Basis an.

Aufgabe 49

Untersuchen Sie jeweils für die gegebene Matrix A, ob das Gleichungssystem $A \cdot x = b$ für alle $b \in \mathbb{R}^3$ lösbar ist.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$, b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & -2 & 6 & 7 \\ -4 & 4 & -6 & -12 \end{pmatrix}$, c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 50

Bestimmen Sie für die Matrizen aus Aufgaben 49 jeweils den Kern ker(A).

— Matrizen: Produkte, Inverse —

Aufgabe 51

Bestimmen Sie, falls möglich, die Matrixprodukte

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 52

a) Berechnen Sie das Matrix-Produkt

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

für beliebige Koeffizienten a, b, c, d.

b) Berechnen Sie das Matrix-Produkt

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & e \\ 0 & f \end{pmatrix}$$

für beliebige Koeffizienten a, b, c, d, e, f.

c) [$*$] Zeigen Sie nun allgemein: Das Produkt zweier Diagonalmatrizen (derselben Größe) ist wieder eine Diagonalmatrix. [Eine Diagonalmatrix ist eine $(n \times n)$-Matrix, bei der alle Einträge bis auf die auf der Diagonalen gleich null sind.]

d) [$*$] Zeigen Sie nun allgemein: Das Produkt zweier oberer Dreiecksmatrizen (derselben Größe) ist wieder eine obere Dreiecksmatrix. [Eine obere Dreiecksmatrix ist eine $(n \times n)$-Matrix in reduzierter Stufenform. Das heißt, alle Einträge a_{ij} mit $i > j$ sind gleich Null.]

Aufgabe 53

Konstruieren Sie jeweils eine Matrix $A \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, die die angegebene Eigenschaft erfüllt.

a) $A \neq E_2$, aber $A^2 = E_2$.

b) $A^2 = -E_2$.

c) $A, A^2, A^3 \neq E_2$ aber $A^4 = E_2$.

d) $A^2 = o (= o_{2,2})$.

e) $A \cdot B = o$, wo $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 54

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ die Matrix mit Koeffizienten

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & , i+1 = j \\ 0 & , i+1 \neq j \end{cases} .$$

Bestimmen Sie die Potenzen $A^2, A^3, ..., A^n$ der Matrix.

Aufgabe 55 ($*$)

Wir nennen eine Folge von Matrizen $(A(k))_{k\in\mathbb{N}}$ in $M(m,n;\mathbb{R})$ konvergent gegen den Grenzwert $A = (a_{ij})_{i,j} \in M(m,n;\mathbb{R})$, wenn alle ihre Komponentenfolgen $(a_{ij}(k))_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gegen die Grenzwerte a_{ij} konvergieren für $i = 1,\dots,m$ und $j = 1,\dots,n$.
Es seien $(A(k))_{k\in\mathbb{N}}$ in $M(m,n;\mathbb{R})$ und $(B(k))_{k\in\mathbb{N}}$ in $M(n,r;\mathbb{R})$ zwei konvergente Matrix-Folgen. Zeigen Sie: Die Folge der Produkte $(A(k)\cdot B(k))_{k\in\mathbb{N}}$ in $M(m,r;\mathbb{R})$ konvergiert ebenfalls, und zwar gegen $A\cdot B$.

Aufgabe 56

Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf Invertierbarkeit und bestimmen Sie ggf. ihre inversen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 57

Was macht die Matrix $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ mit den Standardbasisvektoren? Was ist also ihre inverse Matrix P^{-1}?

Aufgabe 58

(1) Für welche Parameter $a,b,c \in \mathbb{R}$ ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ?

Aufgabe 59

Prüfen Sie die folgenden Matrizen auf Invertierbarkeit und bestimmen Sie ggf. die inversen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 60

Berechnen Sie jeweils das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

a) $\binom{2}{1}, \binom{1}{3}$, b) $\binom{3}{-2}, \binom{2}{3}$, c) $\binom{4}{1}, \binom{-1}{4}$, d) $\binom{3}{4}, \binom{3}{4}$.

Aufgabe 61

Berechnen Sie jeweils das Skalarprodukt der beiden Vektoren.

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 62

Seien $a, b \in \mathbb{R}^m$ mit $\langle a, a \rangle = 5$, $\langle a, b \rangle = 10$ und $\langle b, b \rangle = 21$. Berechnen Sie

a) $\langle a, (a + 3 \cdot b \rangle$, b) $\langle 3 \cdot (a + b), a - b \rangle$, c) $\langle (5 \cdot a + 2 \cdot b), (3 \cdot a - 4 \cdot b) \rangle$.

Aufgabe 63

Berechnen Sie jeweils die Länge des Vektors.

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, f) $\begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ -16 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 64

Bestimmen Sie die euklidischen Längen der angegebenen Vektoren.

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \\ \sqrt{3} \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 65

Die drei Punkte $A = (1; 0; 3)$, $B = (2; 1; 5)$ und $C = (-1; 1; 5)$ bilden ein Dreieck. Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC gleichschenklig ist (d.h. zwei Seiten gleich lang sind) oder sogar gleichseitig ist (d.h. alle drei Seiten gleich lang sind).

Aufgabe 66

Die drei Punkte $A = (2; -1; 3)$, $B = (-1; 3; 2)$ und $C = (3; 2; -1)$ bilden ein Dreieck. Untersuchen Sie, ob das Dreieck ABC gleichschenklig ist oder sogar gleichseitig ist.

Aufgabe 67

Welche der folgenden Vektoren sind zueinander senkrecht?

$$u = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 68

Bestimmen Sie jeweils alle $s \in \mathbb{R}$, für die v und w senkrecht aufeinander stehen.

a) $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ s \end{pmatrix}$, b) $v = \begin{pmatrix} s \\ -1 \\ s+1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2 \\ s-1 \\ 3 \end{pmatrix}$, c) $v = \begin{pmatrix} s \\ s+1 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} -2 \\ s-1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 69

Bestimmen Sie jeweils alle $s \in \mathbb{R}$, für die u senkrecht auf v und w steht.

a) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, b) $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ s \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} s \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} s \\ s \\ -1 \end{pmatrix}$,

c) $u = \begin{pmatrix} -1 \\ s \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 2s-1 \\ s \\ 5 \end{pmatrix}$, d) $u = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ s^2 \\ 0 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ -1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 70

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der Ebene:

1. $M_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \, : \, \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x \rangle \geqslant \sqrt{2}\}$.

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen des Raumes:

1. $N_1 = \{o \neq x \in \mathbb{R}^3 \, : \, \frac{\langle e_1, x \rangle}{\|x\|} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\} \cup \{o\}$,
2. $N_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \, : \, \|x - \langle e_1, x \rangle e_1\| = 1\}$.

(Hierbei bezeichnet $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ den kanonischen Basisvektor.)

Aufgabe 71

Begründen Sie nochmal die Aussage von Aufgabe 3, diesmal mit Hilfe der Formel für die Fläche eines Parallelogramms.

Aufgabe 72

Berechnen Sie die Norm einer beliebigen Linearkombination der Vektoren

1. $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. $w_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ \sqrt{2/3} \end{pmatrix}$.

Was beobachten Sie ? Erklären Sie ihre Beobachtung.

Aufgabe 73

Berechnen Sie jeweils den Winkel zwischen den beiden Vektoren.

$$\text{a) } \begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\5\\5\end{pmatrix}, \qquad \text{b) } \begin{pmatrix}2\\-1\\5\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}, \qquad \text{c) } \begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 74

Sei $\Delta(A,B,C)$ ein Dreieck α,β,γ die Innenwinkel an den Eckpunkten A,B,C und a,b,c die Längen der A,B,C jeweils gegenüberliegenden Seiten. F bezeichne die Fläche des Dreiecks. Beweisen Sie:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{abc}{2F}.$$

Aufgabe 75

Bestimmen Sie alle Seitenlängen eines Dreiecks $\Delta(A,B,C)$ aus der Länge der Seite c und den Winkeln α,β. (c ist die Länge der Seite, die A und B verbindet und α bzw. β sind die Innenwinkel in den Punkten A bzw. B.) Hinweis: Aufgabe 27.

Zusatz: Wenn nun $A = o$, $B = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ $\alpha = \pi/6$ und $\beta = \pi/6$ ist, wo liegt dann der Punkt C ?

Aufgabe 76

Gegeben seien die drei Punkte $A = (1;6;1)$, $B = (-1;3;2)$ und $C = (4;-1;0)$.

a) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig mit rechtem Winkel bei B ist.

b) Bestimmen Sie den Punkt D so, dass das Viereck $ABCD$ ein Rechteck ist.

Aufgabe 77

Untersuchen Sie jeweils, ob der Punkt $(3;-2)$ auf der gegebenen Geraden liegt.

$$\text{a) } \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 + 2x_2 = 5 \right\} \quad \text{b) } \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - 2x_2 = -1 \right\}$$

Aufgabe 78

Untersuchen Sie jeweils, ob der Punkt $(1;-1;2)$ auf der gegebenen Ebene liegt.

$$\text{a) } \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x + 2y + -1z = 2 \right\}, \quad \text{b) } \left\{ \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 4x + 2y + -1z = 0 \right\}.$$

Aufgabe 79

Bestimmen Sie jeweils eine Normalenform der Geraden $g = \{u + rv | r \in \mathbb{R}\}$ im $\mathbb{R}^2$, wobei

a) $u = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$,

b) $u = \begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$ und $v = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$,

c) $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$ und $v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe 80

Bestimmen Sie Normalenformen der folgenden Geraden:

a) g durch die Punkte $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

b) h durch die Punkte $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 81

Berechnen Sie das Kreuzprodukt der Vektoren v und w

$$\text{a)}\quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{b)}\quad v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\text{c)}\quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} 15 \\ 45 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \text{d)}\quad v = \begin{pmatrix} s-1 \\ s \\ 1 \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} s \\ s+1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 82

Berechnen Sie jeweils einen Normalenvektor und geben Sie eine Normalenform der Ebene $E = \{\, u + p \cdot v + q \cdot w \mid p, q \in \mathbb{R} \,\}$ an.

a) $u = \left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$, $\quad v = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\quad w = \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$,

b) $u = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\quad v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$, $\quad w = \left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$,

c) $u = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\quad v = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{smallmatrix}\right)$, $\quad w = \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 7 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Aufgabe 83

Berechnen Sie jeweils eine Parameterform der in Normalenform gegebenen Ebene.

$$\text{a)}\ \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y + 3z = 1 \right\}, \qquad \text{b)}\ \left\{ \left(\begin{smallmatrix} x \\ y \\ z \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x + -1y + -1z = 4 \right\}.$$

Aufgabe 84

Berechnen Sie jeweils eine Parameterform der gesuchten Geraden.

a) Gerade senkrecht zu $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) + p \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) + q \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$ durch $(1;0;3)$,

b) Gerade senkrecht zu $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 8 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) + p \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 8 \\ 5 \end{smallmatrix}\right) + q \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) \,\middle|\, q \in \mathbb{R} \right\}$ durch $(2;8;5)$, c)* Gerade, die senkrecht auf g steht und in E enthalten ist, wobei

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad E = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \,\middle|\, q, r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 85

Berechnen Sie jeweils eine Normalenform (Koordinatenform) der gesuchten Ebene.

a) Ebene senkrecht zu $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ durch $(2; 2; -1)$,

b) Ebene, die den Punkt $(1; 2; -1)$ enthält und senkrecht auf E_1 und E_2 steht, wobei

$$E_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\} \text{ und } E_2 = \left\{ r \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \,\middle|\, r, s \in \mathbb{R} \right\},$$

c) Ebene, die die Gerade g enthält und senkrecht auf die Ebene E steht, wobei

$$g = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{und} \quad E = \left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, q, r \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 86

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage der Geraden und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid r \in \mathbb{R} \}$ und $\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 3x_1 + 2x_2 = 5 \}$,

b) $\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid r \in \mathbb{R} \}$ und $\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 4x_1 - 2x_2 = 5 \}$.

Aufgabe 87

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage von Gerade und Ebene (Gerade liegt in der Ebene; Gerade liegt nicht in der Ebene, ist aber parallel zu ihr; Gerade und Ebene haben genau einen Schnittpunkt) und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + -2y + 3z = 2 \right\}$,

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 4y + -1z = -1 \right\}$,

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x + -3y + 1z = 5 \right\}$.

Aufgabe 88

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage der Ebenen (sind gleich; sind nicht gleich, aber parallel; haben eine Gerade als Schnittmenge) und bestimmen Sie ggf. die Schnittgerade.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + -2y + 3z = 2 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$,

b) $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + -2y + 3z = 2 \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix} + p \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{R} \right\}$,

c) $\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 3x + -5y + 1z = 3\right\}$ und $\left\{\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 0\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 2\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 3\end{pmatrix} \,\middle|\, p,q \in \mathbb{R}\right\}$,

d) $\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y + 8z = 1\right\}$ und $\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 1y + 5z = 1\right\}$,

e) $\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 7y + 3z = 2\right\}$ und $\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x + 9y + 1z = -1\right\}$,

f) $\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x + 1y + 8z = 3\right\}$ und $\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 1y + 6z = 2\right\}$,

g) $\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + 2y + 8z = 1\right\}$ und $\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -x + -2y + -8z = 1\right\}$,

h) $\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + -3y + 1z = 2\right\}$ und $\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + -5y + 3z = -2\right\}$.

Aufgabe 89

Berechnen Sie jeweils den Schnittwinkel der geometrischen Objekte in $\mathbb{R}^3$.

a) $\left\{\begin{pmatrix} 6\\ 3\\ 1\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ 5\end{pmatrix} \,\middle|\, p \in \mathbb{R}\right\}$ und $\left\{\begin{pmatrix} 6\\ 3\\ 1\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1\\ 2\\ -1\end{pmatrix} \,\middle|\, q \in \mathbb{R}\right\}$,

b) $\left\{\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 3\\ 1\\ 10\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 5\end{pmatrix} \,\middle|\, p,q \in \mathbb{R}\right\}$ und $\left\{\begin{pmatrix} 1\\ -1\\ 1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1\\ 4\\ -1\end{pmatrix} \,\middle|\, r \in \mathbb{R}\right\}$,

c) $\left\{\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} -5\\ 3\\ 1\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} -4\\ 2\\ 1\end{pmatrix} \,\middle|\, p,q \in \mathbb{R}\right\}$ und $\left\{\begin{pmatrix} 0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3\\ 1\\ 1\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5\\ 2\\ 1\end{pmatrix} \,\middle|\, r,s \in \mathbb{R}\right\}$.

Aufgabe 90

Bestimmen Sie jeweils den Lotfußpunkt L von P auf der Geraden g.

a) $P = (0;0;2)$ und $g = \left\{\begin{pmatrix} 1\\ 7\\ -1\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2\\ 1\\ -1\end{pmatrix} \,\middle|\, r \in \mathbb{R}\right\}$,

b) $P = (9;3;-1)$ und $g = \left\{\begin{pmatrix} -1\\ 5\\ 0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1\\ -3\\ -3\end{pmatrix} \,\middle|\, r \in \mathbb{R}\right\}$.

Aufgabe 91

Bestimmen Sie zu den Daten aus Aufgabe 90 jeweils den Abstand von P und g.

Aufgabe 92

Berechnen Sie jeweils eine Normalenform (Koordinatenform) von E und bestimmen Sie dann den Abstand von P zu E.

a) $E = \left\{\begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 1\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 3\\ 2\\ -2\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 9\\ 4\\ -5\end{pmatrix} \,\middle|\, p,q \in \mathbb{R}\right\}$ und $P = (3;1;2)$,

b) $E = \left\{\begin{pmatrix} 2\\ -1\\ 2\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} 12\\ 1\\ 2\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 4\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \,\middle|\, p,q \in \mathbb{R}\right\}$ und $P = (5;3;1)$,

c) $E = \left\{\begin{pmatrix} 4\\ 2\\ -3\end{pmatrix} + p\begin{pmatrix} -1\\ 2\\ 2\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 3\\ -1\\ 4\end{pmatrix} \,\middle|\, p,q \in \mathbb{R}\right\}$ und $P = (-1;4;-9)$.

Aufgabe 93

Bestimmen Sie jeweils eine Parameterform der Geraden durch die gegebenen Punkte.

(a) $p = \begin{pmatrix} 2, & 2, & -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 4, & 0, & 1 \end{pmatrix}$,

(b) $p = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \end{pmatrix}$,

(c) $(2, 1)$ und $(2, 4)$.

Aufgabe 94

Untersuchen Sie jeweils, ob die drei Punkte auf einer Geraden liegen.

a) $(3, 2, -4)$ und $(1, 1, 0)$ sowie $(7, 4, 8)$,

b) $(1, 1, 0$ und $(3, -3, 2)$ sowie $(4, -5, 3)$,

c) $(2, -5, 2)$ und $(1, -2, 4)$ sowie $(3, -7, 6)$.

Aufgabe 95

Bestimmen Sie eine Parameterform der Ebene, welche die angegebenen Punkte bzw. Geraden enthält.

a) $(1, 0, 1)$ und $(5, 2, -1)$ sowie $(1, -3, 0)$,

b) $(3, 2, 2)$ und $(4, 3, 3)$ sowie $(4, 3, 4)$,

c) $(0, 1, 0)$ und $\{(1, 0, 1) + r \cdot (2, 1, -2) \mid r \in \mathbb{R}\}$,

Aufgabe 96

Untersuchen Sie jeweils, ob der Punkt $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ auf der Geraden bzw. Ebene liegt.

a) $\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}\}$,

b) $\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\}$,

c) $\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$,

d) $\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 97

Untersuchen Sie jeweils, ob der Punkt P auf der Geraden QR liegt.

a) $P = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$,

b) $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix}$,

c) $P = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $R = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 98

Untersuchen Sie jeweils, ob die vier Punkte in einer Ebene liegen.

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ sowie $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sowie $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$,

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie $\begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 99

Bestimmen Sie die möglichen Lagen zweier Ebenen $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^3$, d.h. diskutieren Sie die verschiedenen Fälle für den Durchschnitt $E_1 \cap E_2$.

Aufgabe 100

Bestimmen Sie die möglichen Lagen zweier Geraden $L_1, L_2 \subset \mathbb{R}^3$, d.h. diskutieren Sie die verschiedenen Fälle für den Durchschnitt $L_1 \cap L_2$.

Aufgabe 101

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage der gegebenen Geraden (sind gleich; sind nicht gleich, aber parallel; haben genau einen Schnittpunkt; sind windschief) und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) $\{\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R}\}$ und $\{\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid q \in \mathbb{R}\}$,

b) $\{ \begin{pmatrix}4\\0\\5\end{pmatrix} + p \cdot \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} \mid p \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix}2\\-3\\4\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-4\\6\\-2\end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$,

c) $\{ \begin{pmatrix}4\\6\\1\end{pmatrix} + r \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix}7\\-2\\2\end{pmatrix} + t \begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$,

d) $\{ \begin{pmatrix}1\\6\\-2\end{pmatrix} + r \begin{pmatrix}3\\-3\\6\end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix}6\\1\\8\end{pmatrix} + t \begin{pmatrix}4\\-4\\8\end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$,

e) $\{ \begin{pmatrix}-2\\2\\3\end{pmatrix} + t \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix}1\\2\\-5\end{pmatrix} + u \begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{R}\}$,

f) $\{ \begin{pmatrix}3\\6\\1\end{pmatrix} + t \begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix}-1\\8\\0\end{pmatrix} + u \begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix} \mid u \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 102

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage von Gerade und Ebene (Gerade liegt in der Ebene; Gerade liegt nicht in der Ebene, ist aber parallel zu ihr; Gerade und Ebene haben genau einen Schnittpunkt) und bestimmen Sie gegebenenfalls den Schnittpunkt.

a) $\{ \begin{pmatrix}4\\1\\-7\end{pmatrix} + s \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix}7\\8\\-4\end{pmatrix} + q \begin{pmatrix}1\\4\\-2\end{pmatrix} + r \begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix} \mid q, r \in \mathbb{R}\}$,

b) $\{ \begin{pmatrix}0\\-2\\16\end{pmatrix} + r \begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + a \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + t \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix} \mid s, t \in \mathbb{R}\}$,

c) $\{ \begin{pmatrix}14\\4\\6\end{pmatrix} + q \begin{pmatrix}2\\1\\-8\end{pmatrix} \mid q \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix}3\\-5\\1\end{pmatrix} + r \begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix} + s \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$.

Aufgabe 103

Untersuchen Sie jeweils die gegenseitige Lage der gegebenen Ebenen (sind gleich; sind nicht gleich, aber parallel; haben eine Gerade als Schnittmenge) und bestimmen Sie gegebenenfalls die Schnittgerade.

a) $\{ \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + p \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} q \begin{pmatrix}-1\\0\\3\end{pmatrix} \mid p, q \in \mathbb{R}\}$ und $\{ \begin{pmatrix}6\\2\\6\end{pmatrix} + r \begin{pmatrix}3\\2\\5\end{pmatrix} + s \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R}\}$,

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid t, u \in \mathbb{R} \right\}$,

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid q, r \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} s, t \in \mathbb{R} \right\}$,

d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \mid t, u \in \mathbb{R} \right\}$ und $\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}$.

— Zusatzaufgaben —

Aufgabe 104

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme über dem Körper $\mathbb{F}_2$:

a) $\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ & & x_3 & = 1 \end{array}$ b) $\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 1 \\ x_1 & +x_2 & & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & = 1 \end{array}$ c) $\begin{array}{rrrl} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & & +x_3 & = 0 \\ & x_2 & & = 0 \end{array}$

Aufgabe 105

a) Bestimmen Sie alle Elemente der $\mathbb{F}_2$-Vektorräume $\mathbb{F}_2^2$ und $\mathbb{F}_2^3$.

b) Wie viele verschiedene Basen hat $\mathbb{F}_2^2$?

Aufgabe 106

Geben Sie alle invertierbaren Matrizen aus $M_{2,2}(\mathbb{F}_2)$ an und bestimmen Sie deren inverse Matrizen.